УДК 517.95

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ТРАЕКТОРНЫЕ АТТРАКТОРЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

A. Mielke[1] и С. Зелик[2]

[1] Matematishes Institut A, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, 70569 Stuttgart, Germany

[2] Институт проблем передачи информации РАН, Москва, ГСП-4, Большой Каретный 19, Россия

Работа посвящена изучению абстрактной модели нелинейной эллиптической краевой задачи второго порядка в цилиндрической области методами теории динамических систем. Показано, что, при выполнении некоторых естественных условий, существенные решения рассматриваемой задачи описываются при помощи глобального аттрактора соответствующей траекторной динамической системы, который может иметь бесконечную фрактальную размерность и бесконечную топологическую энтропию. Кроме того, получены точные оценки сверху и снизу для колмогоровской ε-энтропии этих аттракторов.

§0 Введение.

Пространственные динамические системы возникают при изучении нелинейных эллиптических краевых задач в цилиндрических областях, в которых пространственная координата, соответствующая оси цилиндра, играет роль времени. Использование теории динамических систем для исследования таких задач было инициировано работой [Kir82], в которой было построено локальное центральное многообразие для квазилинейного эллиптического уравнения в полосе. Этот метод сведения эллиптической краевой задачи к динамической системе на пространственном центральном многообразии, позднее названный редукцией Киржгеснера, получил дальнейшее развитие в работах [Mie88,Mie90,IoM91,IoK92,GrT97], где он использовался для исследования различных задач математической физики, возникающих, в частности, в гидродинамике и нелинейной теории упругости. Частный случай вариационных эллиптических задач исследовался в работе [Mie91], в которой было доказано наличие гамильтоновой структуры у редуцированной динамической системы на пространственном центральном многообразии.

Методы, использующие качественную теорию динамических систем для исследования глобальной структуры множества ограниченных решений эллиптических краевых задач в цилиндрических областях, развивались параллельно, начиная с работ [CMS93,Mi94a,Mi94b]. Основной идеей этих методов является введение вспомогательной эллиптической задачи в полуцилиндре $\Omega_+ := (0,\infty)\times\omega$ $((t,x)\in\Omega_+)$ с дополнительным краевым условием $u\big|_{t=0} = u_0$ на его основании и изучение оператора "эволюции"

$$S_t : u(0,x) \to u(t,x), \tag{0.1}$$

где $u(t,x)$ – *ограниченное* решение этой задачи, с динамической точки зрения. Тогда, как известно, если существует глобальный аттрактор (0.1), то он порождается существенными решениями исходной краевой задачи во всем цилиндре $\Omega = \mathbb{R}\times\omega$, то есть решениями, которые определены и ограничены в Ω. Эта взаимосвязь позволяет изучать "динамику" существенных решений, исследуя динамические свойства эволюционного оператора (0.1) на его аттракторе.

К сожалению, ограниченное решение вспомогательной задачи, описанной выше, как правило, не является единственным, поэтому полугруппа (0.1) может быть корректно определена только как полугруппа многозначных отображений. Появления многозначных отображений можно избежать, используя так называемый траекторный подход, при котором множество $\mathcal{K}^+$ всех ограниченных решений вспомогательной задачи, наделенное подходящей топологией, рассматривается как (траекторное) фазовое пространство для динамической системы, порожденной полугруппой положительных сдвигов $(\mathcal{T}_h)_{h\geq 0}$ вдоль оси цилиндра, определенной по формуле

$$(\mathcal{T}_h u)(t,x) = u(t+h,x) \text{ для любых } (t,x)\in\Omega_+,\ h\geq 0. \tag{0.2}$$

Если существует глобальный аттрактор этой полугруппы, то он называется *траекторным аттрактором* исходной задачи. Если траекторный аттрактор может быть вложен в конечномерное инвариантное многообразие, то то это многообразие называется *существенным многообразием*, так как оно содержит все существенные решения рассматриваемой задачи, см. [Mie94b,ViZ96,CSV97,SVWZ99]. (Траекторный подход, описанный выше, используется также для изучения различных *эволюционных* уравнений математической физики, для которых еще не решена проблема единственности решений, например, для трехмерной системы уравнений Навье-Стокса, нелинейных волновых уравнений с быстро растущими нелинейностями и др., см. [ChV97].)

В случае эллиптических краевых задач второго порядка существует еще одна возможность избежать появления многозначных отображений, основанная на замене оператора (0.1) следующим эволюционным оператором:

$$\mathbb{S}_t : (u(0),\partial_t u(0)) \to (u(t),\partial_t u(t)),\quad (u(0),\partial_t u(0))\in\mathbb{K}^+, \tag{0.3}$$

где $\mathbb{K}^+$ – множество всех "начальных данных" $(u(0),\partial_t u(0))$, для которых вспомогательная задача имеет ограниченное решение. Тогда, при некоторых дополнительных ограничениях, это решение будет единственным, и, следовательно, (0.3) корректно определяет непрерывную полугруппу в фазовом пространстве $\mathbb{K}^+$ (см.

[CMS93]). Заметим, однако, что эта полугруппа оказывается гомеоморфной полугруппе сдвигов (0.2), определенной на траекторном фазовом пространстве $\mathcal{K}^+$ (см., например, параграф 2 ниже).

Альтернативный подход, связанный с непосредственным изучением "эволюционного" оператора (0.1), используя соответствующее обобщение понятия глобального аттрактора на случай полугрупп многозначных отображений, был предложен в работе [Bab95a].

Другие идеи и методы качественной теории динамических систем также применяются для исследования эллиптических краевых задач. Так, экспоненциальные дихотомии были построены в работе [PSS97] для исследования бифуркаций уединенных волн. Теория Флоке в окрестности пространственно периодического решения была развита в работах [Mi94a,DFKM96]. Индекс Конли был использован в [FSV98] для доказательства существования нетривиальных гетероклинических решений. Описание структуры аттрактора в случае, когда вспомогательная задача имеет единственное решение, а исходная эллиптическая система допускает глобальную функцию Ляпунова, было получено в [ViZ99].

Заметим, однако, что очень мало известно о хаусдорфовой и фрактальной размерности аттракторов эллиптических уравнений, несмотря на существование хорошо разработанной теории получения оценок этих размерностей в случае эволюционных уравнений (см., например, [Tem88]). Фактически, к настоящему моменту известно только два весьма узких класса эллиптических краевых задач, аттрактор которых имеет конечную размерность. Первый из них – это случай однозначной разрешимости вспомогательной задачи в полуцилиндре, при наличии которой эллиптическая задача в полуцилиндре сводится к некоторому эволюционному уравнению на его сечении (см. [ViZ99]), а второй из них – это случай существования существенного многообразия, когда размерность аттрактора естественно мажорируется размерностью многообразия (см. [Mi94b, Ba95b]).

В настоящей работе мы покажем, что размерность аттрактора может быть бесконечной для эллиптических краевых задач, не принадлежащих вышеперечисленным классам, и дадим количественное описание "толщины" таких аттракторов в терминах колмогоровской ε-энтропии.

Рассматривается следующая абстрактная квазилинейная эллиптическая задача:

$$\begin{cases} \ddot{u} - \gamma\dot{u} - Au = F(u, \dot{u}) \quad \text{при } t > 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{0.4}$$

Здесь $u(t)$ – элемент некоторого гильбертового пространства H со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Линейный оператор $A : D(A) \to H$ предполагается самосопряженным, положительно определенным ($\langle Au, u\rangle \geq \lambda_0\|u\|^2$ для некоторого $\lambda_0 \geq 1$) и имеющим компактный обратный (оператор A^{-1} существует и компактен). Определим шкалу гильбертовых пространств $(H^s)_{s\in\mathbb{R}}$, порожденную оператором A, по формуле $H^s = D(A^{s/2})$, $\|\cdot\|_s \equiv \|\cdot\|_{H^s} = \|A^{s/2}\cdot\|$. Введем также пространства $\mathbb{H}^s = H^s \times H^{s-1}$ с индуцированной на них естественной гильбертовой структурой.

Кроме того, предполагается, что γ – ограниченный симметрический оператор в H, а нелинейная функция F удовлетворяет следующим условиям: существуют положительные константы C и δ ($\delta \ll 1$) и монотонные функции $Q_\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, определенные для любого $\mu > 0$, такие что

$$(0.5)\qquad \begin{cases} (a) & F \in C^1(H^{3/2-\delta} \times H^{1/2-\delta}, H), \\ (b) & \mathrm{D}_u F(u,v) \geq -C - \frac{1}{2}A, \\ (c) & \langle F(u,v), u\rangle \geq -C - 1/2(\|u\|_1^2 + \|v\|^2), \\ (d) & \|F(u,v)\|^2 \leq Q_\mu(\|u\|_{1/2}) + \mu\|u\|_2^2 + C(\|u\|_1^2 + \|v\|^2). \end{cases}$$

Выбор конкретного вида уравнения (0.1) мотивирован следующей эллиптической краевой задачей в цилиндрической области $\Omega_+ = \mathbb{R}^+ \times \omega$ (ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$):

$$(0.6)\qquad \begin{cases} \ddot{u} - \gamma\dot{u} + \Delta_x u = f(u,\dot{u}) + g(x) \quad \text{при } (t,x) \in \Omega_+, \\ u\big|_{\mathbb{R}^+ \times \partial\omega} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

где $u = (u^1, \dots, u^k) \in \mathbb{R}^k$, $\gamma = \gamma^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, $g \in L^2(\omega)$, которая возникает, например, при изучении решений вида бегущей волны для соответствующего эволюционного уравнения в неограниченной цилиндрической области $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$ (см., например, [CMS93], [Bab95a], или [ViZ96]).

Существование ограниченного решения $u(t)$, $t \geq 0$, уравнения (0.4) для любого начального условия $u_0 \in H^{3/2}$ доказано в параграфе 1. Кроме того, в этом параграфе мы выведем диссипативную оценку для *ограниченных* решений $u \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$ (см. определение 1.1) уравнения (0.4), которая имеет фундаментальное значение для использования траекторного подхода, описанного выше.

В параграфе 2 мы докажем, что абстрактное уравнение (0.4) обладает траекторным аттрактором $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$, то есть, что полугруппа (0.2), определенная в пространстве $\mathcal{K}^+$ всех ограниченных решений $u \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$, имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, который порождается существенными решениями уравнения (0.4):

$$\mathcal{A}^{\mathrm{traj}} = \Pi_+\mathcal{K},$$

где $\mathcal{K} \subset W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$ – множество всех существенных решений of (0.4), а Π_+ – оператор ограничения функции на полуось $\mathbb{R}_+$.

Кроме того, при выполнении дополнительного условия

$$(0.7)\qquad \|\mathrm{D}_u F(u,v)\|_{H^1 \to H} + \|\mathrm{D}_v F(u,v)\|_{H \to H} \leq Q(\|u\|_{3/2} + \|v\|_{1/2})$$

(где Q – некоторая монотонная функция) на нелинейность F, мы докажем, что любое ограниченное решение $u(t)$ уравнения (0.4) однозначно определяется парой начальных значений $(u(0), \partial_t u(0))$ и проверим, таким образом, что полугруппа (0.3) корректно определена в пространстве $\mathbb{K}^+$. Этот результат основывается на оценках типа логарифмической выпуклости для абстрактных эллиптических уравнений, см. [AgN67,CMS93]. В этом параграфе мы также проверим, что естественная проекция $\Pi_0 : \mathcal{K}^+ \to \mathbb{K}^+$, определенная по формуле $\Pi_0 u := (u(0), \partial_t u(0))$, является непрерывным по Гельдеру гомеоморфизмом и, следовательно, полугруппа (0.3) может быть определена по формуле

$$\mathbb{S}_h := \Pi_0 \mathcal{T}_h (\Pi_0)^{-1}. \tag{0.8}$$

Этот результат гарантирует существование глобального аттрактора $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}^+$ полугруппы (0.3), а также доказывает соотношение

$$\mathbb{A} = \Pi_0 \mathcal{A}^{\rm traj}. \tag{0.9}$$

В параграфе 3 мы используем понятие колмогоровской ε-энтропии для изучения количественных характеристик аттрактора $\mathcal{A}^{\rm traj}$ для эллиптической задачи (0.4), построенного в предыдущем параграфе. Детальное изложение колмогоровской энтропии дано, например, в работе [KoT59], а ее приложения к эволюционным уравнениям математической физики рассмотрены в [ChV98, CoE99, Zel99,Zel00a]. Основным результатом третьего параграфа является следующая оценка сверху для колмогоровской ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}^{\rm traj}\big|_{(0,T)}\right)$ ограничений аттрактора $\mathcal{A}^{\rm traj}$ на произвольный конечный интервал $(0,T)$:

$$\mathbf{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}^{\rm traj}|_{(0,T)}\right) \le C\left[T + \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}\right] \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}, \tag{0.10}$$

где C и R_0 – положительные константы, не зависящие от $\varepsilon > 0$ и $T \ge 0$, а $\ln_+ z := \max\{\ln z, 0\}$.

Заметим, что оценки (0.10) недостаточно, чтобы сделать вывод о конечности фрактальной размерности $d_{\rm fract}(\mathbb{A})$ аттрактора. Более того, как показано в в параграфе 4, эта величина, действительно, может быть бесконечной. В действительности, мы построили пример оператора A и нелинейного отображения F удовлетворяющего условиям (0.5), такого что колмогоровская энтропия соответствующего аттрактора допускает следующую оценку снизу:

$$\mathbf{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}^{\rm traj}|_{(0,T)}\right) \ge C' T \ln_+ \frac{R_0'}{\varepsilon} \tag{0.11}$$

для некоторых $C' > 0$, $R_0' > 0$, не зависящих от $T \ge 1$ и $\varepsilon > 0$. Кроме того, используя рассуждения, основанные на логарифмической выпуклости, мы выведем из (0.11) оценку

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathbb{A}) \ge C'' \left(\ln_+ \frac{R_0''}{\varepsilon}\right)^{3/2}, \tag{0.12}$$

которая показывает бесконечность следующих размерностей:

$$\dim_{\rm fract}\left(\mathcal{A}^{\rm traj}\big|_{(0,T)}\right) = \dim_{\rm fract}(\mathbb{A}) = \infty.$$

Наш пример базируется на контрпримере к теории Флоке для линейных эллиптических уравнений с периодическими коэффициентами, построенном в [DFKM96]. Этот контрпример имеет вид

$$\ddot{v} - Av = L_1(t)v + L_2(t)\dot{v},$$

где L_1 и L_2 – периодичны по $t \in \mathbb{R}$ и подобраны так, чтобы существовало нетривиальное решение $v : \mathbb{R} \to H^2$, убывающее при $t \to \pm\infty$ быстрее любой экспоненты ($\|v(t)\|_2 \le ce^{-t^2}$). Для построения этого контрпримера необходимо, чтобы

$$L_1 \in C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H^{s+r_1}, H^s)) \text{ и } L_2 \in C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H^{s+r_2}, H^s))$$

для некоторых $r_1 \ge 1$, $r_2 \ge 0$ и $s \ge 0$. С другой стороны, для нашей теоремы о существовании траекторного аттрактора (см. (0.5) и (0.7)) требуется, чтобы $r_1 \le 1$ и $r_2 \le 0$. Таким образом, наш пример находится в точности на границе области допустимых значений параметров r_1 и r_2.

В параграфе 5 мы дадим более детальное исследование динамических свойств траекторной динамической системы, соответствующей примеру, построенному в предыдущем параграфе. В частности, мы покажем, что в отличии от динамических систем (ДС), порождаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) и большинством естественных эволюционных уравнений в частных производных (УрЧП) в ограниченных областях, рассматриваемая ДС имеет бесконечную топологическую энтропию. Мы опишем хаотическую природу этой ДС при помощи гомеоморфного вложения схемы Бернулли с бесконечным числом символов. Отметим также, что этот тип хаотического поведения оказывается очень близок к поведению ДС, порождаемых эволюционными УрЧП в неограниченных областях, см. [Zel00, Zel00a].

Эллиптическая краевая задача (0.6) в полном цилиндре $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$ может быть интерпретирована, в частности, как уравнение для нахождения положений равновесия соответствующей системы уравнений реакции-диффузии в Ω:

$$\partial_\eta u = \ddot{u} - \gamma\dot{u} + \Delta_x u - f(u, \dot{u}) - g(x), \ (t, x) \in \Omega, \ \eta > 0, \quad u\big|_{\eta=0} = u^0, \tag{0.13}$$

где t остается пространственной переменной, а роль физического времени играет переменная η. Известно (см. [BaV89, MiS95, EfZ02]), что при выполнении естественных условий на нелинейную функцию f и внешнюю силу g это уравнение обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}^{gl} \subset W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$. Кроме того, очевидно, справедливо вложение

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{A}^{gl}, \tag{0.15}$$

где $\mathcal{K}$ – множество существенных решений эллиптической краевой задачи (0.6). Аналог оценок (0.10) и (0.11) для ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}^{gl}$ был получен в работах [CoE99, Zel99, EfZ02], см. также параграф 5 для более подробного обсуждения этой аналогии.

В следующей работе мы изучим вопрос о дополнительных условиях, гарантирующих конечность фрактальной размерности $d_{\mathrm{fract}}(\mathbb{A})$ и/или топологической энтропии $h_{\mathrm{top}}(\mathbb{S}_h, \mathbb{A})$. К настоящему времени этот факт известен только при наличии щели в спектре оператора A, гарантирующей существование существенного многообразия [Mi94b], или в случае $\gamma \gg \mathrm{id}$, которое дает единственность решения задачи (0.4), см. [CSV97,ViZ99] и замечание 2.3 ниже.

Данная работа выполнена при частичной поддержке Deuthsche Forschungsgemeinschaft, DANSE, Mi 459/2-3. Авторы также выражают свою благодарность М. Ефендиеву, Д. Тураеву и М. Вишику за множество полезных обсуждений.

§1 Априорные оценки. Существование решений.

В этом параграфе мы выведем несколько априорных оценок для решений задачи (0.4) и, основываясь на этих оценках, докажем существование ограниченных решений этой задачи. Для этого нам понадобятся следующие функциональные пространства.

Определение 1.1. Для любых $-\infty \le T_1 < T_2 \le +\infty$ и любого $l \in \mathbb{R}^+$ определим пространство

$$W^l(T_1,T_2) \equiv L^2((T_1,T_2),H^l) \cap W^{l,2}((T_1,T_2),H). \tag{1.1}$$

Для простоты мы будем писать далее $W^l(T)$ вместо $W^l(T,T+1)$. Обозначим через $W^l_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ пространство Фреше, порождаемое полунормами $\|\cdot\|_{W^l(T)}$, $T \in \mathbb{R}^+$. Более того, определим также пространство

$$W^l_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+) \equiv \{u \in W^l_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+) : \|u\|_{l,b} \equiv \sup\nolimits_{T\in\mathbb{R}^+} \|u\|_{W^l(T)} < \infty\}. \tag{1.2}$$

Пространства $W^l_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $W^l_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$ определяются аналогично, взяв $T \in \mathbb{R}$ вместо $T \in \mathbb{R}^+$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (0.5). *Тогда, для любого* $u_0 \in H^{3/2}$ *существует хотя бы одно решение* $u \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$ *задачи* (0.4). *Более того, существуют* $C_*, \alpha > 0$ *и монотонная функция* $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *такие что любое решение* $u \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$ *задачи* (0.4) *удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W^2_{\mathrm{bd}}(T)} \le Q(\|u_0\|_{3/2})e^{-\alpha T} + C_* \quad \text{при} \ \ T \ge 0. \tag{1.3}$$

Доказательство. Мы выведем сначала априорную оценку (1.3). Существование решения будет доказано позднее, основываясь на этой оценке.

Следуя [ViZ99], умножим уравнение (0.4) скалярно в H на функцию $\rho(t)u(t)$ и проинтегрируем по $t \in [\tau, +\infty)$. Здесь $\rho : \mathbb{R}^+ \to (0,\infty)$ – весовая функция, такая что $\int_0^\infty \rho(t)\,dt < \infty$ и $|\dot\rho(t)| \le \varepsilon\rho(t)$ для любых $t \ge 0$. Интегрируя полученное равенство по частям и используя симметричность γ, получим

$$\begin{aligned} \int_\tau^\infty \big[\|\dot u\|^2 + \|u\|_1^2\big]\rho\,dt + \Big[\frac{\rho}{2}\partial_t\|u\|^2 - \frac{\rho}{2}\langle\gamma u,u\rangle\Big]_{t=\tau} \\ = \int_\tau^\infty \big[-\langle u, F(u,\dot u)\rangle\rho - \langle u,\dot u\rangle\dot\rho + \langle\gamma u,u\rangle\dot\rho/2\big]\,dt \\ \le \int_\tau^\infty \Big[C + \frac12(\|u\|_1^2 + \|\dot u\|^2) + \varepsilon\|u\|\|\dot u\| + \varepsilon\|\gamma\|\,\|u\|^2\Big]\rho\,dt. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь мы использовали также условие (0.5)(c). Взяв $\rho(t) := e^{\varepsilon(t-\tau)}$ и зафиксировав достаточно малое $\varepsilon > 0$, получим

$$\frac{d}{d\tau}\|u(\tau)\|^2 \le C' + C'\|u(\tau)\|^2 \quad \text{при } \tau \ge 0. \tag{1.5}$$

Из неравенства Гронуола следует теперь первая априорная оценка для H-нормы решения

$$\|u(t)\|^2 \le e^{C't}\|u_0\|^2 + e^{C't} - 1 \quad \text{при } t \ge 0. \tag{1.6}$$

Естественно, эта оценка полезна только при малых t, так как ее правая часть растет экспоненциально при $t \to \infty$.

В качестве следующего шага мы докажем аналог оценки а (1.3) для $W^1(T)$-нормы решения, в которой правая часть не будет расти при $t \to \infty$. Для этого необходимо уделить особое внимание начальному условию $u_0 = u|_{t=0}$. Действительно, согласно абстрактной теореме о следах, существует линейный ограниченный оператор $\mathbb{T} : H^{3/2} \to W^2(\mathbb{R}^+)$, такой что $v = \mathbb{T}u_0$ удовлетворяет условиям

$$v(0) = u_0, \quad \operatorname{supp} v \subset [0,1] \quad \text{и} \quad \|v\|_{W^2(0)} \le C\|u_0\|_{3/2}. \tag{1.7}$$

Переписав уравнение (0.4) относительно новой неизвестной $w = u - v$, будем иметь

$$\begin{cases} \ddot w - \gamma \dot w - Aw = F(w+v, \dot w+\dot v) - h(t), \\ w\big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

где $h = \ddot v - \gamma \dot v - Av$. Следовательно

$$\operatorname{supp} h \in [0,1], \quad \|h\|_{L^2(0)} \le C_1\|u_0\|_{3/2}. \tag{1.9}$$

Взяв скалярное произведение (1.8) в H с $\rho(t)w(t)$, проинтегрировав по $t \in \mathbb{R}^+$ и использовав краевое условие $w(0) = 0$, рассуждая так же, как и при выводе (1.4), получим

$$\begin{aligned} (1.10) \quad \int_0^\infty & \left[\|\dot w\|^2 + \|w\|_1^2\right]\rho\, dt \\ &= \int_0^\infty \Big[-\langle w, F(v+w, \dot v+\dot w)\rangle - \langle w, h\rangle + \frac{\dot\rho}{2\rho}\big[\langle \gamma w, w\rangle - 2\langle w, \dot w\rangle\big]\Big]\rho\, dt. \end{aligned}$$

Наиболее сложным для оценки является первое слагаемое в правой части (1.10), содержащее нелинейность F. Для его оценки мы напомним, что функции $v(t)$ и h отличны от нуля только при $t \in [0,1]$. Поэтому, при $t \in [0,1]$ мы должны использовать более слабые оценки (0.5)(b)+(d) нелинейности, тогда как при $t \ge 1$ мы можем использовать более сильную оценку (0.5)(c). Таким образом, для ненулевого v получим

$$\begin{aligned} -\langle w, F(v+w, \dot v+\dot w)\rangle &= -\langle w, F(v+w, \dot v+\dot w) - F(v, \dot v+\dot w)\rangle - \langle w, F(v, \dot v+\dot w)\rangle \\ &\le C\|w\|^2 + \frac12\|w\|_1^2 + \frac{1}{4\alpha}\|w\|^2 + \alpha\|F(v, \dot v + \dot w)\|^2 \\ &\le C(\alpha)\|w\|^2 + \frac12\|w\|_1^2 + \alpha Q_\mu(\|v\|_{1/2}) + \alpha\mu\|v\|_2^2 + \alpha C(\|v\|_1^2 + \|\dot v+\dot w\|^2) \\ &\le C(\alpha)\|w\|^2 + \frac12\|w\|_1^2 + Q_1(\alpha)(\|u_0\|_{3/2}) + 2\alpha C\|\dot w\|^2. \end{aligned}$$

При $t \geq 1$ мы используем лучшую оценку (0.5)(c), так как в этом случае $v \equiv 0$:

$$-\langle w, F(v+w, \dot v+\dot w)\rangle = -\langle F(w,\dot w), w\rangle \leq C_2 + 1/2(\|w\|_1^2 + \|\dot w\|^2).$$

Подставив эти оценки в (1.10), зафиксировав достаточно малые константы α и $\varepsilon := \sup|\dot\rho|/\rho$ и использовав неравенство (1.6) для оценки выражения $C(\alpha)\|w(t)\|^2$ при $t \in [0,1]$, мы выведем следующую оценку:

$$\int_0^\infty \left[\|\dot w\|^2 + \|w\|_1^2\right]\rho\, dt \leq \int_0^1 Q_2(\|u_0\|_{3/2})\rho\, dt + \int_0^\infty \left[C_2 + \frac{3}{4}\left[\|\dot w\|^2 + \|w\|_1^2\right]\right]\rho\, dt.$$

Фиксировав в этом неравенстве весовую функцию $\rho(t) := e^{-\varepsilon|t-T|}$, $T \geq 0$, получим

$$\begin{aligned}\|w\|^2_{W^1(T)} = \int_T^{T+1} \left[\|\dot w\|^2 + \|w\|_1^2\right] dt \leq e^\varepsilon \int_0^\infty \left[\|\dot w\|^2 + \|w\|_1^2\right] e^{-\varepsilon|t-T|} dt \\ \leq 4e^\varepsilon \sup_{t\in[0,1]} e^{-\varepsilon|t-T|}\, Q_2(\|u_0\|_{3/2}) + e^\varepsilon \frac{8}{\varepsilon} C_2 \leq 5Q_2(\|u_0\|_{3/2})e^{-\varepsilon T} + 10C_2/\varepsilon.\end{aligned}$$

Возвращаясь обратно к переменной $u = v+w$ и используя неравенство (1.7) для функции v, мы докажем следующую оценку:

$$\|u\|_{W^1(T)} \leq Q_3(\|u_0\|_{3/2})e^{-\varepsilon T} + C_3. \tag{1.11}$$

Теперь мы готовы завершить доказательство априорной оценки решения в пространстве $W^2(T)$. Для этого мы используем регулярность решений уравнения $\ddot z - Az = f$ с условиями Дирихле на границе, которое является абстрактной эллиптической краевой задачей. Рассмотрим интервал $J_T = (\max\{0, T-1\}, T+1\}$ и введем срезающую функцию $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$, такую что $\psi(t) = 1$ при $t \in [0,1]$ и $\psi(t) = 0$ при $t \notin [-1,2]$. Пусть также $\psi_T(t) = \psi(t-T)$ и $w_T = \psi_T w$. Тогда, согласно (1.8), последняя функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \ddot w_T - Aw_T = f_T \equiv \psi_T(\gamma\dot w + F(u,\dot u) + h) + 2\dot\psi_T \dot w + \ddot\psi_T w \quad \text{при } t \in J_T, \\ w_T = 0 \quad \text{при} \ \ t \in \partial J_T. \end{cases} \tag{1.12}$$

Применив теорему о регулярности решений к линейному эллиптическому уравнению (1.12) и использовав условия (0.5), получим

$$\begin{aligned}\|w_T\|^2_{W^2(J_T)} &\leq C\Big[\|w\|^2_{W^1(J_T)} + \|h\|^2_{L^2(J_T)} + \|\psi_T F(u,\dot u)\|^2_{L^2(J_T)}\Big] \\ &\leq Q_4(\|u_0\|_{3/2})e^{-\varepsilon T} + C_4 + \int_{J_T} C\left[Q_\mu(\|u(t)\|_{1/2}) + \mu\psi_T(t)^2\|w(t)\|_2^2\right] dt \\ &\leq Q_5(\|u_0\|_{3/2})e^{-\varepsilon T} + C_5 + C\mu\|w_T\|^2_{W^2(J_T)}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь мы использовали условие (0.5)(d) и оценку (1.11). Выбрав константу μ в оценке (1.13) достаточно малой, будем иметь

$$\|w\|_{W^2(T)} \leq C\|w_T\|_{W^2(J_T)} \leq 2Q_5(\|u_0\|_{3/2})e^{-\varepsilon T} + 2C_5. \tag{1.14}$$

Таким образом, априорная оценка (1.3) доказана, и для завершения доказательства теоремы 1.2 остается проверить существование решения $u \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$ рассматриваемой задачи. Для этого мы построим сначала для любого $N \in \mathbb{N}$ решение $u_N(t)$ следующей вспомогательной задачи вида (0.4) на конечном интервале:

$$(1.15) \qquad \begin{cases} \ddot{u}_N - \gamma\dot{u}_N - Au = F(u_N, \dot{u}_N) & \text{при } t \in (0, N), \\ u_N\big|_{t=0} = u_0, \ u_N\big|_{t=N} = 0, \end{cases}$$

а затем получим решение исходной задачи предельным переходом $N \to \infty$.

Повторяя дословно вывод оценки (1.3), мы получим, что любое решение $u_N \in W^2(0,T)$ задачи (1.15) удовлетворяет оценке

$$(1.16) \qquad \|u_N\|_{W^2(T)} \le Q(\|u_0\|_{H^{3/2}})e^{-\alpha T} + C_* \quad \text{при } T \in [0, N-1],$$

в которой функция Q и константы C_* и α такие же, как и в оценке (1.3) и, следовательно, не зависят от $N \in \mathbb{N}$. Заметим также, что, согласно (0.5)(a) и абстрактной теореме о следах, нелинейный оператор $F : u \to F(u, \dot{u})$ является компактным и непрерывным отображением из $W^2(0,N)$ в $W^0(0,N)$ для любого *конечного* N. Таким образом, существование решения u_N задачи (1.15) может быть выведено стандартным образом из априорной оценки (1.16) при помощи теоремы Лере-Шаудера о неподвижной точке, см., например, [ViZ96,ViZ99].

Для построения решения u исходной задачи (0.4) мы заметим, что, согласно (1.16), последовательность u_N равномерно ограничена в $W^2(0,T)$ при любом $T > 0$. Поэтому, благодаря рефлексивности пространства $W^2(0,T)$ и канторовской диагональной процедуре, мы можем без ограничения общности считать что u_N слабо сходятся в пространстве $W^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ к некоторой функции $u \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$. Переходя к пределу $N \to \infty$ в уравнениях (1.15), мы получим, что u – решение уравнения (0.4). Действительно, предельный переход в линейных членах уравнения (1.15) очевиден, и нелинейное слагаемое также не вызывает дополнительных трудностей, благодаря условию (0.5)(a) и наличию сильной сходимости

$$(u_N, \dot{u}_N) \to (u, \dot{u}) \text{ в пространстве } C_{\mathrm{loc}}(H^{3/2-\delta} \times H^{1/2-\delta})$$

для любого $\delta > 0$. Теорема 1.2 доказана.

§2 Аттрактор.

Этот параграф посвящен исследованию поведения решений (0.4) при $t \to \infty$. Заметим, что условия (0.5) гарантируют лишь существование решения u, но не его единственность, следовательно, мы не можем построить ДС, соответствующую (0.4), стандартным образом. Для того, чтобы обойти эту трудность мы будем использовать траекторный подход, развитый в работе [ChV97] для случая эволюционных задач без единственности и в работе [ViZ96] для случая эллиптических краевых задач.

Определим сначала фазовое пространство $\mathcal{K}^+$ искомой ДС как множество всех решений задачи (0.4), определенных при $\mathbb{R}^+$ и ограниченных при $t \to \infty$, то есть

$$\mathcal{K}^+ \equiv \{u \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+) : u\text{– решение (0.4) для некоторого } u_0 \in H^{3/2}\}.$$

Так как наше уравнение не зависит явно от t, то полугруппа $(\mathcal{T}_h)_{h\geq 0}$ сдвигов вдоль оси t действует в $\mathcal{K}^+$:

$$(2.1) \qquad \mathcal{T}_h : \mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^+ , \quad (\mathcal{T}_h u)(t) \equiv u(t+h), \quad h \geq 0.$$

Наделим множество $\mathcal{K}^+$ *локальной* топологией, индуцированной вложением $\mathcal{K}^+$ в пространство Фреше $W^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Так как $W^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ метризуемо, то $\mathcal{K}^+$ также является метризуемым топологическим пространством.

Определение 2.1. Множество $\mathcal{K}^+$, наделенное *локальной* топологией, называется *траекторным фазовым пространством* задачи (0.4); полугруппа $(\mathcal{T}_h)_{h\geq 0}$, определенная в (2.1), называется *траекторной ДС*, порожденной задачей (0.4); глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ полугруппы $(\mathcal{T}_h)_{h\geq 0}$, действующей в $\mathcal{K}^+$, называется *траекторным аттрактором* задачи (0.4) и обозначается символом $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$.

Замечание 2.2. Напомним, что по определению глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ полугруппы $\mathcal{T}_h$ в $\mathcal{K}^+$ должен притягивать *ограниченные* подмножества $\mathcal{K}^+$, хотя *ограниченность* является метрическим понятием и априори может зависеть от выбора метрики в пространстве $W^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Однако, как нетрудно показать, используя оценку (1.3), в нашем случае множество $B \subset \mathcal{K}^+$ ограничено в $W^2_{loc}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда B ограничено в $W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$, и, следовательно, "ограниченные" подмножества $\mathcal{K}^+$ определены корректно.

Замечание 2.3. Стоит отметить также, что топология в $\mathcal{K}^+$ выбрана так, чтобы в случае, когда задача (0.4) имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от начальных условий u_0 (см. [CSV97,ViZ99] по поводу достаточных условий), полугруппа $\mathcal{T}_h$ совпадала бы с точностью до гомеоморфизма (и даже с точностью до C^1-диффеоморфизма в предположениях работы [ViZ99]) с "обычной" полугруппой $S_h : H^{3/2} \to H^{3/2}$, $S_h u_0 = u(h)$.

Для формулировки следующей теоремы необходимо ввести понятие *существенного решения.* По определению, это решение задачи (0.4), определенное для всех $t \in \mathbb{R}$ и принадлежащее пространству $W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$. Обозначим также через $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \subset W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$, *существенное множество* уравнения (0.4), которое состоит из всех существенных решений ([Mi94b]).

Теорема 2.4. *При выполнении сформулированных выше условий уравнение* (0.4) *обладает траекторным аттрактором* $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$, *который допускает следующее описание:*

$$(2.2) \qquad \mathcal{A} = \Pi_+ \mathcal{K},$$

где $\mathcal{K} \subset W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$ *– существенное множество уравнения* (0.4), *а* Π_+ *оператор ограничения функции на полуось* $\mathbb{R}^+$.

Доказательство. Согласно теореме о существовании аттрактора для абстрактных полугрупп (см., например, [BaV89]) достаточно проверить, что

(i). множество $\mathcal{K}^+$ является полным метрическим пространством;

(ii). оператор $\mathcal{T}_h : \mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^+$ непрерывен при фиксированном h;

(iii). Полугруппа $\mathcal{T}_h$ обладает предкомпактным поглощающим множеством B_0 в $\mathcal{K}^+$, то есть таким, что для любого ограниченного $B \subset \mathcal{K}^+$ существует $\tau = \tau(B)$, такое что $\mathcal{T}_h B \subset B_0$ при $h \geq \tau$.

Проверим эти условия. Действительно, так как пространство $W^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ является полным, то первое условие следует из замкнутости $\mathcal{K}^+$ в $W^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Последний факт очевиден, так как предел решений уравнения (0.4) также является решением с соответствующим начальным условием u_0 (см. конец доказательства теоремы 1.2). Непрерывность оператора $\mathcal{T}_h$ также очевидна, так как $\mathcal{T}_h$ – сдвиг вдоль оси t.

Таким образом, остается построить предкомпактное поглощающее множество $B_0 \subset \mathcal{K}^+$. Из оценки (1.3) следует, что

$$B_* = \{u \in W^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+) \,:\, \|u\|_{W^2_{\text{bd}}(\mathbb{R}^+)} \leq 2C_*\} \cap \mathcal{K}^+ \neq \varnothing \tag{2.3}$$

является поглощающим множеством $\mathcal{T}_h$ в $\mathcal{K}^+$. Следовательно, $B_0 = \mathcal{T}_1 B_*$ – также поглощающее множество полугруппы $\mathcal{T}_h$. Проверим, что это множество – предкомпакт в $W^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Для этой цели мы воспользуемся регулярностью решений эллиптических уравнений.

Согласно канторовской диагональной процедуре, достаточно доказать, что для любого $T \geq 1$ множество $B_*\big|_{[T,T+1]} = \{u|_{[T,T+1]} : u \in B_*\}$ предкомпактно в $W^2(T)$. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвольная последовательность в B_*. Определим функции $z_{T,n} = \psi_T u_n$, где срезающая функция ψ_T такая же, как и в формуле (1.12). Тогда функция $z_{T,n}$ – решение уравнения

$$\begin{cases} \ddot z_{T,n} - A z_{T,n} = h_{T,n} \equiv \psi_T(\gamma \dot u_n + F(u_n, \dot u_n)) + 2\dot\psi_T \dot u_n + \ddot\psi_T u_n, \\ z_{T,n}(T-1) = z_{T,n}(T+2) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Так как последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена в $W^2_{\text{bd}}(\mathbb{R}^+)$, то из компактности вложения $W^2((T-1,T+2)) \subset W^{2-\delta}((T-1,T+2))$ и условия (0.5)(a) следует, что (после перехода к подпоследовательности, если это необходимо) $h_{T,n} \to h_T$ в пространстве $L^2((T-1,T+2))$. Применив теперь теорему о регулярности к уравнению (2.4), получим, что $z_{T,n} = \psi_T u_n \to u_T$ в $W^2((T-1,T+2))$. Так как $\psi_T(t) = 1$ при $t \in [T, T+1]$, то отсюда следует, что $u_n \to u$ в $W^2(T)$. Теорема 2.4 доказана.

Во второй части этого параграфа мы дадим другую интерпретацию ДС, порожденной уравнением (0.4), которая проясняет природу неединственности решений задачи (0.4). Для этой цели нам понадобится дополнительное условие (0.7) на нелинейность F и некоторые оценки на разность $v(t) := u_1(t) - u_2(t)$ между произвольными решениями $u_1, u_2 \in W^2_{\text{bd}}(\mathbb{R}^+)$ уравнения (0.4), которая удовлетворяет следующему абстрактному линейному эллиптическому уравнению:

$$\ddot v - Av = L_1(t)v + L_2(t)\dot v, \tag{2.5}$$

а операторы L_j задаются формулами: $L_1(t) := \int_0^1 \mathrm{D}_u F(u_1(t)+sv(t), \dot u_1(t)+s\dot v(t))ds$, $L_2(t) := \gamma + \int_0^1 \mathrm{D}_v F(u_1(t)+sv(t), \dot u_1(t)+s\dot v(t))ds$. Более того, из условий (0.7) и теоремы 1.2 следует, что

$$\|L_1(t)\|_{H^1\to H} + \|L_2(t)\|_{H\to H} \leq M, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.6}$$

где константа M зависит только от $\|u_1(0)\|_{H^{3/2}}$ и $\|u_2(0)\|_{H^{3/2}}$ и, следовательно, равномерно ограничена на на ограниченных подмножествах $\mathcal{K}^+$.

Для решений уравнения (2.5) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть* $J = (0,T)$ *и* $v \in W^2(J)$ *удовлетворяет* (2.5). *Предположим, что существует* $M > 0$, *такое что*

$$\sup_{t\in J} \|L_1(t)\|_{H^1\to H} \le M, \qquad \sup_{t\in J} \|L_2(t)\|_{H\to H} \le M. \tag{2.7}$$

(Напомним, что $\|L_1\|_{H^1\to H} = \|LA^{-1/2}\|_{H\to H}$*.) Пусть* $y(t) := \|v(t)\|_1^2 + \|\dot v(t)\|^2$. *Тогда* $y : J \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет следующим двум оценкам, справедливым для любых* $t \in J$*:*

$$y(t) \ge y(0)e^{-2M^2t^2-bt}, \quad \text{где } b = 4M - 4\langle A^{3/4}v(0), A^{1/4}\dot v(0)\rangle / y(0) \tag{2.8}$$

и

$$y(t) \le \big[y(0)\big]^{1-t/T}\big[y(T)\big]^{t/T} e^{2M(M+4/T)t(T-t)}. \tag{2.9}$$

Наличие вложения $W^2((0,T)) \to C([0,T], H^{3/2}) \cap C^1([0,T], H^{1/2})$ гарантирует, что константа b в (2.8) определена корректно.

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на оценках типа логарифмической выпуклости, полученных в работе [AgN67]. Действительно, введем функцию

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \dot v(t) + A^{1/2}v(t) \\ \dot v(t) - A^{1/2}v(t) \end{pmatrix}, \qquad \xi \in W^1_{\mathrm{bd}}(J)^2 \subset C_{\mathrm{bd}}(J, H^{1/2} \times H^{1/2}). \tag{2.10}$$

Тогда из (2.5) следует, что ξ – решение линейного уравнения

$$\dot\xi(t) - \mathcal{B}\xi(t) = \mathcal{C}(t)\xi(t), \text{ где } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -A^{1/2} & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix}, \; \mathcal{C}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{C}_1(t) & \mathcal{C}_2(t) \\ \mathcal{C}_1(t) & \mathcal{C}_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$\mathcal{C}_1 = L_2 + L_1A^{-1/2}$ и $\mathcal{C}_2 = L_2 - L_1A^{-1/2}$. Элементарные вычисления показывают, что $2y(t) = \|\xi(t)\|_*^2 \equiv \|\xi_1(t)\|^2 + \|\xi_2(t)\|^2$. Более того, из условия (2.7) следует, что оператор $\mathcal{C}(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{C}(t)\xi\|_* \le 2M\|\xi\|_* \quad \text{для любых } t \in J. \tag{2.12}$$

Предположим, что $y(\tau) > 0$ для некоторого $\tau \in J$ (в противном случае доказывать нечего). Тогда из (2.10) следует, что существует максимальный относительно открытый интервал J_τ в $[0,T]$, такой что $\tau \in J_\tau$ и $y(t) > 0$ при $t \in J_\tau$. Определим функцию $\alpha : J_\tau \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\alpha(t) = \ln y(t) - \int_\tau^t \Phi(s)\,ds, \text{ где } \Phi(t) = \frac{\langle \mathcal{C}(t)\xi(t), \xi(t)\rangle_*}{y(t)}, \tag{2.13}$$

а $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ – скалярное произведение в $H \times H$.

Продифференцировав (2.13) по t, использовав определение функции $\Phi(t)$ и уравнение (2.11), после несложных вычислений получим

$$\dot{\alpha} = \langle \mathcal{B}\xi, \xi \rangle_*/y, \qquad \ddot{\alpha} = \frac{2}{y}\big[\langle \eta, \eta \rangle_* + \langle \eta, \mathcal{C}\xi \rangle_*\big], \quad \text{где } \eta = \mathcal{B}\xi - \frac{\langle \mathcal{B}\xi, \xi \rangle_*}{2y}\xi.$$

Из неравенства Коши–Шварца и оценки (2.12) следует теперь, что

$$\ddot{\alpha}(t) \geq -\frac{\|\mathcal{C}(t)\xi(t)\|_*^2}{2y(t)} \geq -4M^2 \quad \text{при } t \in J_\tau.$$

Эта оценка показывает, что функция $J_\tau \ni t \mapsto \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + 2M^2t^2$ является выпуклой. Эта выпуклость, вместе с предположением $y(\tau) > 0$, немедленно показывает, что интервал J_τ совпадает с $J = [0, T]$.

Выбрав $\tau = 0$ в определении (2.13) и пропотенцировав неравенство $\tilde{\alpha}(t) \geq \tilde{\alpha}(0) + \dot{\tilde{\alpha}}(0)t$, будем иметь

$$y(t) \geq y(0)e^{-2M^2t^2 + \dot{\alpha}(0)t + \int_0^t \Phi(s)\,ds}.$$

Это неравенство, вместе с очевидными оценками $|\Phi(s)| \leq 4M$ и $\dot{\alpha}(0) \geq -b$, доказывает оценку (2.8). Оценка (2.9) выводится аналогичным образом из неравенства $\tilde{\alpha}(t) \leq (1-t/T)\tilde{\alpha}(0) + (t/T)\tilde{\alpha}(T)$. Теорема 2.5 доказана.

Напомним теперь, что $\mathbb{H}^s = H^s \times H^{s-1}$, введем линейное отображение следа по формуле

$$\Pi_0 : W^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{H}^{3/2}; \quad \Pi_0 u = (u(0), \dot{u}(0)) \tag{2.14}$$

и определим множество $\mathbb{K}^+ = \Pi_0\mathcal{K}^+ \subset \mathbb{H}^{3/2}$. Очевидно, что множество $\mathbb{K}^+$ замкнуто и, согласно теореме 2.5, отображение $\Pi_0\big|_{\mathcal{K}^+} : \mathcal{K}^+ \to \mathbb{K}^+$ является биекцией. Это означает, что при выполнении условий теоремы 2.5 задача Коши

$$\begin{cases} \ddot{u} - \gamma\dot{u} - Au = F(u, \dot{u}), \\ u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

имеет единственное решение $u \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$ для любых $(u_0, v_0) \in \mathbb{K}^+$, и, следовательно, корректно определена разрешающая полугруппа

$$\mathbb{S}_h : \mathbb{K}^+ \to \mathbb{K}^+; \quad \mathbb{S}_h(u(0), \dot{u}(0)) = (u(h), \dot{u}(h)) \tag{2.16}$$

или, в эквивалентной форме, $\mathbb{S}_h = \Pi_0\mathcal{T}_h(\Pi_0)^{-1}$. Более того, сформулированное ниже следствие теоремы 2.5 показывает, что полугруппа (2.16) непрерывна по Гельдеру в $\mathbb{K}^+$.

Следствие 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и условие* (0.7). *Тогда полугруппа* (2.16) *непрерывна по Гельдеру с любой константой Гельдера α, принадлежащей интервалу* $(0, 1)$, *то есть*

$$\|\mathbb{S}_h z_1 - \mathbb{S}_h z_2\|_{\mathbb{H}^{3/2}} \leq C_\alpha e^{M_\alpha h^2}\|z_1 - z_2\|^{1-\alpha}_{\mathbb{H}^{3/2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{K}^+, \tag{2.17}$$

где константы C_α и M_α зависят от α и $\|z_i\|_{\mathbb{H}^{3/2}}$, $i=1,2$.

Доказательство. Действительно, выбрав в оценке (2.9) $t=h$ и $T=h/\alpha$ и использовав ограниченность решений u_1 и u_2 при $t\to\infty$, получим

$$\|\mathbb{S}_h z_1 - \mathbb{S}_h z_2\|_{\mathbb{H}^1} \le C'_\alpha e^{M'_\alpha h^2}\|z_1-z_2\|^{1-\alpha}_{\mathbb{H}^1}, \quad z_1, z_2\in\mathbb{K}^+. \tag{2.18}$$

Для вывода оценки (2.17) из (2.18) достаточно заметить, что из абстрактной теоремы о регулярности, примененной к уравнению (2.5), и теоремы о следах следует оценка

$$\|v(h)\|_{H^{3/2}} + \|\dot v(h)\|_{H^{1/2}} \le C\|v\|_{W^2(h)} \le C_1\|v(0)\|_{H^{3/2}} + C_2\|v\|_{W^1(h,h+2)}, \tag{2.19}$$

в которой константы C и C_1 зависят только от оператора A, а константа C_2 зависит также от константы M, определенной в (2.6). Объединяя оценки (2.18) и (2.19), получаем неравенство (2.17). Следствие 2.6 доказано.

Наша следующая задача – показать, что ДС $(\mathbb{S}_h)_{h\ge0}$ в пространстве $\mathbb{K}^+$ и траекторная ДС $(\mathcal{T}_h)_{h\ge0}$ в пространстве $\mathcal{K}^+$ являются топологически сопряженными при помощи гомеоморфизма Π_0. Очевидно, что для этого достаточно доказать непрерывность $(\Pi_0)^{-1}$. Для проверки последнего факта мы введем следующую метрику в пространстве $\mathcal{K}^+$:

$$d(u_1,u_2) := \sup_{T\in\mathbb{R}^+} e^{-T^4}\|u_1-u_2\|_{W^2(T)}. \tag{2.20}$$

С одной стороны, как нетрудно проверить, топология, индуцированная в $\mathcal{K}^+$ метрикой (2.20), совпадает с топологией, индуцированной вложением $\mathcal{K}^+\subset W^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ (благодаря ограниченности $\mathcal{K}^+$ в $W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$, а с другой стороны, из оценки (2.17) следует, что

$$d(u_1,u_2) \le C''_\alpha\left(\|u_1(0)-u_2(0)\|_{H^{3/2}} + \|\dot u_1(0)-\dot u_2(0)\|_{H^{1/2}}\right)^{1-\alpha} \tag{2.21}$$

для любых $u_1,u_2\in\mathcal{K}^+$ и любого $0<\alpha<1$. Здесь мы использовали также оценку

$$\|v\|_{W^2(h)} \le C\|v\|_{C(h,h+1;H^{3/2})\cap C^1(h,h+1;H^{1/2})} \tag{2.22}$$

для решений (2.5), которая является элементарным следствием абстрактной теоремы о регулярности и оценки (2.6).

Таким образом, мы проверили, что полугруппы (2.16) и (2.1) действительно являются топологически сопряженными. Поэтому, теорема 2.4 дает следующий результат.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и условие* (0.7). *Тогда полугруппа $\mathbb{S}_h$ обладает глобальным аттрактором $\mathbb{A}$ в $\mathbb{K}^+$, который описывается следующим образом:*

$$\mathbb{A} = \Pi_0\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}. \tag{2.23}$$

§3 Колмогоровская энтропия аттрактора и ее оценки сверху.

В этом параграфе мы используем понятие колмогоровской ε-энтропии для изучения траекторного аттрактора уравнения (0.4), построенного в предыдущем параграфе. Мы начнем с напоминания определений ε-энтропии и фрактальной размерности. Подробное изложение этих вопросов можно найти в работе [KoT59]. Приложения понятия колмогоровской энтропии к эволюционным уравнениям математической физики даны в работах [ChV98,CoE99,Zel99,Zel01,Zel01a].

Определение 3.1. Пусть M – метрическое пространство, а K – предкомпактное множество в нем. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_\varepsilon(K) = N_\varepsilon(K, M)$ наименьшее число ε–шаров в M, необходимое для покрытия множества K (это число, очевидно, конечно, так как K – предкомпакт). По определению, колмогоровской ε-энтропией множества K в M называется следующее число:

$$\mathbf{H}_\varepsilon(K) = \mathbf{H}_\varepsilon(K, M) \equiv \ln N_\varepsilon(K). \tag{3.1}$$

Пример 3.2. Пусть K – компактное n-мерное липшицево подмногообразие в M. Тогда очевидно, что $C_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \le N_\varepsilon(K) \le C_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n$ и, следовательно, $\mathbf{H}_\varepsilon(K) = (n + o(1)_{\varepsilon\to 0})\ln\frac{1}{\varepsilon}$.

Этот пример оправдывает следующее определение.

Определение 3.3. *Фрактальной (энтропийной) размерностью* множества $K \subset\subset M$ называется следующее число:

$$\dim_{\mathrm{fract}}(K) = \dim_{\mathrm{fract}}(K, M) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbf{H}_\varepsilon(K)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{3.4}$$

Заметим, что построенный выше аттрактор $\mathcal{A}$ уравнения (0.4) компактен только в локальной топологии пространства $W^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$, поэтому мы будем рассматривать ε-энтропию его ограничений $\mathcal{A}\big|_{[0,T]}$ на конечный интервал $[0, T]$ и изучать ее зависимость от двух параметров T и ε. Для этого нам понадобятся весовые аналоги пространств $W^l_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$.

Определение 3.4. По заданной весовой функции $\phi \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ определим пространство

$$W^l_{\mathrm{bd},\phi}(\mathbb{R}^+) \equiv \{u \in W^l_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+) : \|u\|_{l,\mathrm{bd},\phi} \equiv \sup\nolimits_{T\in\mathbb{R}^+}\{\phi(T)\|u\|_{W^l(T)}\} < \infty\}. \tag{3.5}$$

Следуя [MiS95,Mi97,EfZ01,Mi00,Zel01a], мы введем также класс допустимых весовых функций.

Определение 3.5. Функция $\phi \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ называется весовой функцией с порядком роста $\mu \ge 0$, если существует $C > 0$, такое что

$$\phi(x+y) \le Ce^{\mu|x|}\phi(y), \quad \phi(x) > 0 \tag{3.6}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Как нетрудно проверить, из (3.6) следует также, что $\phi(x + y) \ge C^{-1}e^{-\mu|x|}\phi(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}\big|_{(0,T)}, W^2_{\mathrm{bd}}((0,T))) \le C\big[T + \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}\big] \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}, \tag{3.7}$$

в которой $\ln_+ \gamma := \max\{0, \ln\gamma\}$, *а константы* C *и* R_0 *не зависят от* T *и* ε.

Доказательство этой теоремы основано на серии промежуточных результатов и будет закончено после леммы 3.9.

Предложение 3.7. *Пусть* $\mathcal{K} \subset W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$ *– существенное множество уравнения* (0.4), *определенное в теореме 2.4. Тогда, для любого* $\alpha > 0$ *существует константа* $C = C(\alpha)$, *такая что для любых двух решений* $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$ *и любого* $T \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\|u_1 - u_2\|_{W^2(T)} \le C \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ e^{-\alpha|T-t|} \|u_1 - u_2\|_{W^0(t)} \right\}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Действительно, определим функцию $v(t) = u_2(t) - u_1(t)$ (как и в доказательстве теоремы 2.5). Тогда v удовлетворяет уравнению (2.5). Более того, из абстрактной внутренней оценки, примененной к этому уравнению, следует, что

$$\|v\|_{W^2(T)} \le C\|h_v\|_{W^0(T-1,T+2)}, \quad \text{где } h_v := L_1(t)v + L_2(t)\dot v \tag{3.9}$$

и C не зависит $T \in \mathbb{R}$. Умножив (3.9) на $e^{-\alpha|T-M|}$ и взяв верхнюю грань по $T \in \mathbb{R}$ от обеих частей полученного неравенства, мы выведем следующий аналог теоремы о регулярности в весовых пространствах $W^2_{\mathrm{bd},e^{-\alpha|T-M|}}$:

$$\sup_{T\in\mathbb{R}} \left\{ e^{-\alpha|T-M|} \|v\|_{W^2(T)} \right\} \le C_1 \sup_{T\in\mathbb{R}} \left\{ e^{-\alpha|T-M|} \|h_v\|_{W^0(T)} \right\}, \tag{3.10}$$

где константа C_1 не зависит M. Таким образом, остается оценить правую часть неравенства (3.10). Для этого мы заметим, что из условия (0.5)(a) и ограниченности $\mathcal{K}$ в $W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$ следует оценка

$$\|L_1(t)\|_{H^{3/2}\to H} + \|L_2(t)\|_{H^{1/2}\to H} \le R_*, \tag{3.11}$$

где R_* не зависит от t и $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$. Следовательно, согласно(3.11) и интерполяционным неравенствам (см. [Tri78]),

$$\|h_v(t)\|_{W^0(T)} \le C_2 R_* \|v\|_{W^{3/2}(T)} \le \mu\|v\|_{W^2(T)} + C_\mu \|v\|_{W^0(T)}, \tag{3.12}$$

где $\mu > 0$ произвольно, а $C_\mu > 0$ – положительная константа, зависящая от μ, но не зависящая от T и $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$. Зафиксировав $\mu = 1/(2C_1)$ в неравенстве (3.12) и подставив его в (3.10), получим

$$\sup_{T\in\mathbb{R}} \left\{ e^{-\alpha|T-M|} \|v\|_{W^2(T)} \right\} \le 2C_1C_\mu \sup_{T\in\mathbb{R}} \left\{ e^{-\alpha|T-M|} \|v\|_{W^0(T)} \right\}. \tag{3.13}$$

Очевидное неравенство

$$\|v\|_{W^2(M)} \le e^{-\alpha} \sup_{T\in\mathbb{R}} \left\{ e^{-\alpha|T-M|} \|v\|_{W^2(T)} \right\}$$

завершает доказательство предложения 3.7.

Рассмотрим теперь семейство весовых функций

$$\phi_R(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| < R, \\ e^{R-|t|} & \text{при } |t| \ge R, \end{cases} \tag{3.14}$$

где $R \in \mathbb{R}^+$. Эти функции, очевидно, удовлетворяют неравенству (3.6) с константами $\mu = 1$ и $C_\phi = 1$, которые не зависят, таким образом, от R.

Следствие 3.8. *Пусть* $\mathcal{K} \subset W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$ – *существенное множество уравнения* (0.4). *Тогда, существует константа* $C_\mathcal{K} > 0$, *такая что для любых* $u_1, u_2 \in K$ *и любого* $R > 0$ *справедлива следующая оценка:*

$$\|u_1 - u_2\|_{W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})} \le C_\mathcal{K} \|u_1 - u_2\|_{L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})}. \tag{3.15}$$

Действительно, фиксировав $\alpha = 2$ в неравенстве (3.8), умножив его на $\phi_R(T)$ и применив $\sup_{T\in\mathbb{R}}$ к обеим частям полученного неравенства, после несложных преобразований мы получим оценку (3.15) (см. [Zel01a]). Более того, так как ϕ_R удовлетворяют (3.6) равномерно по $R > 0$, то константа $C_\mathcal{K}$ в (3.15) также не зависит от R.

Заметим, что весовые функции ϕ_R выбраны таким образом, чтобы

$$\|v\big|_{(0,R)}\|_{W^2_{\mathrm{bd}}((0,R))} \le \|v\|_{W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})}$$

для любых $v \in W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$, следовательно,

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}\big|_{(0,R)}, W^2_{\mathrm{bd}}((0,R))) \le \mathbf{H}_\varepsilon(K, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})). \tag{3.16}$$

Таким образом, для оценки энтропии множеств $\mathcal{A}\big|_{(0,R)}$, следуя [Zel01a], мы будем оценивать сверху энтропию существенного множества $\mathcal{K}$ уравнения (0.4) в весовых пространствах $W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})$. Для этого нам понадобится следующая лемма, доказательство которой основано на оценке (3.15) и компактности вложения $W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$ в $L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})$.

Лемма 3.9. *Энтропия существенного множества* $\mathcal{K}$ *уравнения* (0.4) *удовлетворяет следующей рекуррентной оценке:*

$$\mathbf{H}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K}, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})) \le L\big[R+1+\ln_+ \frac{R_0'}{\varepsilon}\big] + \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{K}, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})), \tag{3.17}$$

в которой константы L *и* R_0' *не зависят от* $R > 0$ *и* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $\{B(u^i, \varepsilon, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}) : i = 1, \dots, N_\varepsilon\}$ – ε-покрытие множества $\mathcal{K}$ (здесь и далее через $B(v, \mu, X)$ обозначается шар радиуса μ с центром в точке v

в метрике пространства X). Заметим, что $\mathcal{K}\cap B(u^i, C\varepsilon, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R}))$ компактно в $L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})$, следовательно, каждое такое множество может быть покрыто конечным числом $\varepsilon/(2C_{\mathcal{K}})$-шаров $\{B(u^{i,j}, \varepsilon/(2C_{\mathcal{K}}), L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})),\ j=1,\cdots,\mathcal{M}_i(\varepsilon)\}$, где $C_{\mathcal{K}}$ такое же, как и в (3.15), а

$$\mathcal{M}_i(\varepsilon) := N_{\varepsilon/(2C_{\mathcal{K}})}(\mathcal{K}\cap B(u^i,\varepsilon, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})), L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R}))). \tag{3.18}$$

Из оценки (3.15) следует теперь, что система шаров $\{B(u^{i,j},\varepsilon/2, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})) : i = 1,\dots,N_\varepsilon,\ j=1,\dots,\mathcal{M}_i(\varepsilon)\}$ является $\varepsilon/2$-покрытием $\mathcal{K}$, что приводит к рекуррентной оценке

$$\mathbf{H}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K}, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})) \le \max_{i=1,\cdots,N_\varepsilon} \ln \mathcal{M}_i(\varepsilon) + \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{K}, W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})). \tag{3.19}$$

Таким образом, остается оценить величины $\mathcal{M}_i(\varepsilon)$, введенные в (3.18). Для этого мы заметим, что, согласно (1.3), $\|u\|_{W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})} \le C_*$ для любого $u\in\mathcal{K}$, следовательно,

$$\|u\|_{W^2_{\phi_R}(T)} \le \varepsilon/(4C_{\mathcal{K}}) \text{ при } |T| \ge T_\varepsilon \equiv R + \ln_+ \frac{4C_*C_{\mathcal{K}}}{\varepsilon}. \tag{3.20}$$

Поэтому,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_i(\varepsilon) &\le N_{\varepsilon/(4C_{\mathcal{K}})}(\mathcal{K}\cap B(u^i,\varepsilon,W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R})), L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon)))\\ &\le N_{\varepsilon/(4C_{\mathcal{K}})}(B(u^i,\varepsilon,W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon))), L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon)))\\ &\qquad \le N_{1/(4C_{\mathcal{K}})}(B(0,1,W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon))), L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon))).\end{aligned} \tag{3.21}$$

В первой оценке была использована оценка "хвостов" (3.20), во второй оценке мы убрали символ "$\mathcal{K}\cap$", увеличив при этом значение $N_{\varepsilon/(4C_{\mathcal{K}})}(\dots)$, а в третьей оценке мы воспользовались гомотетией и трансляционной инвариантностью шаров в банаховых пространствах.

Итак, остается оценить энтропию оператора вложения

$$W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T,T)) \subset L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T,T)). \tag{3.22}$$

Для этой цели мы введем гладкий аналог $\psi_R\in C^\infty(\mathbb{R})$ весовых функций ϕ_R, такой что

$$\max\{|\dot\psi_R(t)|, |\ddot\psi_R(t)|\} \le \psi_R(t) \text{ и } C'\phi_R(t) \le \psi_R(t) \le C''\phi_R(t),$$

где константы C' и C'' не зависят от R. Тогда, как нетрудно проверить, отображение $\mathbb{F}_R : u \to \psi_R^{1/2} u$ реализует линейный изоморфизм банаховых пар $\mathbb{B}(T) = (W^2_{\mathrm{bd}}((-T,T)), L^2_{\mathrm{bd}}((-T,T)))$ и $\mathbb{B}_R(T) = (W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T,T)), L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T,T)))$. Более того,

$$\|\mathbb{F}_R\|_{\mathbb{B}(T)\to\mathbb{B}_R(T)} + \|\mathbb{F}_R^{-1}\|_{\mathbb{B}_R(T)\to\mathbb{B}(T)} \le C_2, \tag{3.23}$$

где C_2 не зависит от T и R (см. [Zel01a]). Таким образом,

$$\begin{aligned}(3.24)\quad \ln\mathcal{M}_i(\varepsilon)&\le \mathbf{H}_{1/(4C_\mathcal{K})}(B(0,1,W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon))),L^2_{\mathrm{bd},\phi_R}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon)))\\ &\le \mathbf{H}_{1/(4C_\mathcal{K}C_2^2)}(B(0,1,W^2_{\mathrm{bd}}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon))),L^2_{\mathrm{bd}}((-T_\varepsilon,T_\varepsilon))).\end{aligned}$$

Очевидная оценка

$$\begin{aligned}&\mathbf{H}_\mu(B(0,1,W^2_{\mathrm{bd}}((-T,T))),L^2_{\mathrm{bd}}((-T,T)))\le\\ &\qquad\le(2T+1)\mathbf{H}_{\mu/2}(B(0,1,W^2_{\mathrm{bd}}((-1,1))),L^2_{\mathrm{bd}}((-1,1)))\end{aligned}$$

заканчивает теперь доказательство леммы 3.9.

Завершение доказательства теоремы 3.6. Согласно (1.3), $\mathbf{H}_{C_*}(\mathcal{K},W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R}))=0$ для любого $R\ge 0$. Итерируя оценку (3.17) k раз, получим

$$(3.25)\qquad \mathbf{H}_{2^{-k}C_*}(\mathcal{K},W^2_{\mathrm{bd},\phi_R}(\mathbb{R}))\le L(R+1+\ln_+\frac{R_0'2^{k-1}}{C^*})k\quad \text{для любых } k\in\mathbb{N}.$$

По заданному $\varepsilon>0$ мы выберем k, такое что $2^{-k}C_*\le\varepsilon<2^{-k+1}C_*$. Подставив это значение k в оценку (4.25), мы получим оценку (3.7). Теорема 3.6 доказана.

Мы завершим этот параграф приложением теоремы 3.6 к изучению эллиптической краевой задачи (0.6) в цилиндрической области $\Omega_+=\mathbb{R}^+\times\omega$, где $\omega\subset\subset\mathbb{R}^n$ – гладкая ограниченная область. Для простоты мы сформулируем условия на нелинейную функцию $f(u,\dot u)$ только для случая $n\le 3$. Эти условия имеют следующий вид:

$$(3.26)\qquad \begin{cases}1.\ f\in C^1(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k),\\ 2.\ f(u,v)\cdot u\ge -C;\quad \mathrm{D}_u f(u,v)\ge -C,\\ 3.\ |f(u,v)|+|\,\mathrm{D}_u f(u,v)|\le C(1+|u|^{k_1})(1+|v|^{k_2}),\\ 4.\ |\,\mathrm{D}_v f(u,v)|\le C(1+|u|^{k_1}),\end{cases}$$

где $0\le k_2<1$ и $0\le k_1<\frac{n+3}{n-1}(1-k_2)$. Заметим, что в случае, когда нелинейность не зависит явно от $\partial_t u$ (и, следовательно, $k_2=0$), мы получаем стандартные ограничения на рост нелинейности $f(u)$, сформулированные в работе [Bab95a].

Следствие 3.10. *Пусть $\gamma=\gamma^*\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$, $g\in L^2(\omega)$, $n\le 3$, а нелинейность f удовлетворяет условиям (3.26). Тогда уравнение (0.6) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.6 и, следовательно, обладает траекторным аттрактором $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$, энтропия которого допускает оценки сверху вида (3.7).*

Доказательство. Перепишем уравнение (0.6) в абстрактной форме (0.4). Действительно, в этом случае $H=L^2(\omega)$, $A=-\Delta_x$ (с граничными условиями Дирихле) и $F(u,v):=f(u,v)+g$. Следовательно, необходимо проверить, что определенный так оператор $F(u,v)$ удовлетворяет условиям (0.5). Для этого мы напомним, что пространства $H^s:=D((-\Delta_x)^{-s/2})$ удовлетворяют вложению $H^s\subset H^s(\omega)$ при $s\ge 0$, где $H^s(\omega)$ – классические соболевские пространства (см., например, [Tri78]).

Заметим также, что в случае $n \le 3$ справедливо вложение $H^{3/2} \subset L^p$ для любого $p < \infty$, а, следовательно, для любого фиксированного $p < \infty$ существует $\delta = \delta(p) > 0$, такое что $H^{3/2-\delta} \subset L^p$.

Проверим условие (0.5)(a). Действительно, согласно(3.26)(3) и неравенству Гельдера,

$$\|\operatorname{D}_u F(u,v)\theta\|^2_{L^2} \le C\|(1+|u|^{2k_1})(1+|v|^{2k_2})|\theta|^2\|_{L^1} \le$$
$$\le (1+\|v\|^{2k_2}_{L^2})(1+\|u\|^{2k_1}_{L^{4k_1/(1-k_2)}})\|\theta\|^2_{L^{4/(1-k_2)}} \le Q(\|u\|_{H^{3/2-\delta}} + \|v\|_{L^2})\|\theta\|^2_{H^{3/2-\delta}}$$

при достаточно малом $\delta > 0$. Оценка

$$\|\operatorname{D}_v F(u,v)\theta\| \le Q(\|u\|_{H^{3/2-\delta}} + \|v\|_{H^{1/2-\delta}})\|\theta\|_{H^{1/2-\delta}}$$

доказывается аналогично. Непрерывность операторов F, $\operatorname{D}_u F$ и $\operatorname{D}_v F$ выводится стандартным образом из условия (3.26)(a). Таким образом, условие (0.5)(a) проверено. Условия (0.5)(b), (0.5)(c) являются немедленными следствиями предположения (3.26)(2). Поэтому, остается вывести условие (0.5)(d) из (3.26)(3). Действительно, согласно неравенству Гельдера и теореме вложения Соболева,

$$\|F(u,v)\|^2_{L^2} \le C(1+\|v\|^2_{L^2}) + \|u\|^p_{L^p} \le C(1+\|v\|^2_{L^2}) + C_1\|u\|^p_{H^s(\omega)}, \tag{3.27}$$

где $p := 2k_1/(1-k_2)$ и $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{n}$. Если $s \le 1/2$, то (0.5)(d) немедленно следует из (3.27). Предположим, что $s \ge 1/2$. Тогда, согласно интерполяционному неравенству,

$$\|u\|_{H^s(\omega)} \le C_2\|u\|^{(2s-1)/3}_{H^2(\omega)}\|u\|^{(4-2s)/3}_{H^{1/2}(\omega)}. \tag{3.28}$$

Заметим, что (0.5)(d) следует из (3.27) и (3.28) если $p(2s-1)/3 < 2$. Поэтому достаточно проверить это неравенство. Заметим, что, согласно нашим предположениям, $p < 2(n+3)/(n-1)$, следовательно, $s < 2n/(n+3)$, а значит, $p(2s-1)/3 < 2(n+3)/3(n-1)\cdot 3(n-1)/(n+3) = 2$. Итак, условие (0.5)(d) также проверено. Следствие 3.10 доказано.

§4 Энтропия аттрактора: пример точной оценки снизу.

В этом параграфе мы построим пример уравнения (0.4), для которого оценка энтропии (3.7) является, в некотором смысле, точной. Более того, фрактальная размерность аттрактора $\mathbb{A}$ оказывается бесконечной. Этот пример существенно использует контрпример к теории Флоке для абстрактных эллиптических краевых задач в цилиндрических областях, построенный в работах [Mi94a,DFKM96].

Рассмотрим следующее линейное эллиптическое уравнение в полосе $\mathbb{R}\times\omega \equiv \mathbb{R}\times(0,\pi)$:

$$\ddot u + \partial_x^2 u = L_1(t)u + L_2(t)\dot u, \quad u\big|_{\mathbb{R}\times\partial\omega} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $L_1(t)$ и $L_2(t)$ – линейные операторы, которые являются T-периодическими по t. Основная идея вышеупомянутого контрпримера – построить операторы L_1 и L_2 таким образом, чтобы уравнение (4.1) имело решение u, которое убывало бы быстрее любой экспоненты при $t \to \pm\infty$. Этот факт, очевидно, противоречит теории Флоке, при наличии которой решение должно быть линейной комбинацией произведений экспонент и периодических функций. Точнее, следующий результат доказан в монографии [DFKM96] (см. Аппендикс A, стр. 261–262).

Теорема 4.1. *Существуют T-периодические операторы $L_j(t)$, удовлетворяющие условиям*

$$L_1 \in C^\infty_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H^{s+1}, H^s)) \text{ и } L_2 \in C^\infty_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H^s, H^s)) \quad \text{для любого } s \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

и $L_j(t+T) = L_j(t)$ для любых $t \in \mathbb{R}$, такие что уравнение (4.1) обладает решением $u \in W^2(\mathbb{R})$, которое допускает следующую оценку:

$$C_1 e^{-\beta t^2} \le \|u(t)\|_{L^2(\omega)} \le C_2 e^{-t^2} \quad \text{при } t \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

для некоторых положительных констант β, C_1 и C_2. Более того, все коэффициенты Фурье $u_n(t) = \int_0^\pi u(t,x)\sin(nx)\,dx$ этого решения имеют компактные носители в $\mathbb{R}$. (Мы обозначаем здесь символом H^s шкалу пространств, порожденную лапласианом в ω с граничными условиями Дирихле.)

Заметим, что не только функция u, но и все функции, полученные из u сдвигами на kT, $k \in \mathbb{Z}$, (то есть, $\mathcal{T}_{kT}u : t \mapsto u(t+kT)$) являются линейно независимыми решениями уравнения (4.1), и, следовательно, линейный эллиптический оператор в $L^2(\mathbb{R}\times\omega)$, определенный уравнением (4.1), имеет бесконечномерное ядро. Определим множество

$$\mathbb{L} \equiv \left\{ v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathcal{T}_{kT} u \;:\; a_k \in \mathbb{R},\ \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty \right\}. \tag{4.4}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть u – решение, построенное в теореме 4.1,* а $\mathbb{L}$ *определено формулой (4.4). Предположим также, что носитель первого коэффициента Фурье $u_1 : t \mapsto \int_0^\pi u(t,x)\sin x\,dx$ функции u удовлетворяет условию $\varnothing \ne \operatorname{supp} u_1 \subset [r, r+N]$ для некоторого $r \in \mathbb{R}$ и $N \in (0,T)$. Тогда*

$$C_1 \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| \le \|v\|_{W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})} \le C_2 \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| \tag{4.5}$$

для любого $v \in \mathbb{L}$.

Доказательство. Действительно, левая часть неравенства (4.5) следует из того, что множества $\operatorname{supp} \mathcal{T}_{kT} u_1$ не пересекаются при разных k.

Для доказательства правой части мы заметим, что из (4.3) и регулярности решений эллиптических уравнений следует оценка $\|u\|_{W^2(\tau)} \le C_2 e^{-\tau^2/2}$ для решения u. Таким образом,

$$\|v\|_{W^2(\tau)} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| \|u\|_{W^2(\tau-kT)} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| C_2 e^{-(\tau-kT)^2/2} \le C \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|. \tag{4.7}$$

Лемма 4.2 доказана.

Заменив период T на lT, $l \in \mathbb{N}$, если это необходимо, мы можем считать, что условие леммы 4.2 на носитель $\operatorname{supp} u_1$ выполнено для функции u, введенной в теореме 4.1.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия леммы 4.2 и пусть*

$$\mathbb{L}_R = \{v \in \mathbb{L} : \|v\|_{W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})} \le R\}. \tag{4.8}$$

Тогда существуют положительные константы $C(R)$, M_0 и ε_0, такие что при $M \ge M_0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедлива оценка снизу

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathbb{L}_R\big|_{(0,M)}, W^2_{\mathrm{bd}}((0,M))) \ge C(R) M \ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{supp} u_1 \subset [0,T]$. Пусть $\mathbb{L}^k_R = \{v \in \mathbb{L}_R : v(t) = \sum_{i=1}^k a_k u(t-iT)\}$, тогда для любых $v^1, v^2 \in \mathbb{L}^k_R$ справедлива оценка

$$\|v^1 - v^2\|_{W^2_b((0,(k+1)T))} \ge \|v^1 - v^2\|_{C([0,(k+1)T],H)} \ge K \sup_{i=1,\dots,k} |a^1_i - a^2_i|, \tag{4.10}$$

где $K = \|u_1\|_{C([0,T])} > 0$.

Для любого достаточно большого M выберем $k = k_M$ как решение неравенства $(k+1)T > M \ge kT$. Тогда правая оценка (4.5) гарантирует, что функция $v \in \mathbb{L}$ принадлежит $\mathbb{L}_R$, если все коэффициенты $|a_k| \le R/C_2$. Более того, согласно (4.10), две функции v_1 и v_2 из $\mathbb{L}^k_R$ ε-различимы, если $|a^1_i - a^2_i| \ge \varepsilon/K$ хотя бы для одного $i \in \{0, \dots, k\}$. Следовательно,

$$N_{\varepsilon/2}(\mathbb{L}^k_R, W^2_{\mathrm{bd}}([0,M])) \ge \Big(2\big[\frac{KR}{C_2\varepsilon}\big] + 1\Big)^k. \tag{4.11}$$

Так как $k \sim M$, то (4.11) доказывает лемму 4.3.

Теперь мы готовы построить уравнение вида (0.4), удовлетворяющее условиям теоремы 3.6 таким образом, чтобы его аттрактор $\mathcal{A}$ содержал множество $\Pi_+\mathbb{L}_R$ при достаточно малом R. Тогда лемма 4.3 даст необходимую оценку снизу ε-энтропии аттрактора.

Пусть операторы L_1 и L_2 – такие же, как и в теореме 4.1. Так как эти операторы T-периодичны (для простоты мы считаем далее, что $T = 2\pi$), то существуют гладкие семейства операторов $\widehat{L}_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(H^{s+1}, H^s))$ и $\widehat{L}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(H^s, H^s))$, такие что

$$\widehat{L}_1(w_1, w_2) = \widehat{L}_2(w_1, w_2) = 0 \text{ при } |w_1|^2 + |w_2|^2 \ge 2 \tag{4.12}$$

и

$$L_1(t) = \widehat{L}_1(\cos t, \sin t), \quad L_2(t) = \widehat{L}_2(\cos t, \sin t). \tag{4.13}$$

Более того, пара $w(t) = (\cos t, \sin t)$ может быть получена как решение системы ОДУ

$$\ddot{w} - w = \frac{2(|w|^2 w - 3w)}{1 + |w|^4}. \tag{4.14}$$

Пусть $\phi_R(z):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – срезающая функция, такая что $\phi_R=1$ при $|z|\le R^2$ и $\phi_R=0$ при $|z|\ge 2R^2$. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \ddot w - w = 2(|w|^2w{-}3w)/(1{+}|w|^4), \\ \ddot u+\partial_x^2u=\phi_R\big(\|u\|^2_{H^1(\omega)}{+}\|\dot u\|^2_{L^2(\omega)}\big)\big[\widehat L_1(w_1,w_2)u{+}\widehat L_2(w_1,w_2)\dot u\big]. \end{cases} \tag{4.15}$$

Тогда, с одной стороны, из вложения $W^2_{\rm bd}(\mathbb{R})\subset C_{\rm bd}(\mathbb{R},H^1)\cap C^1_{\rm bd}(\mathbb{R},H)$ следует неравенство

$$\|u(t)\|^2_{H^1}+\|\dot u(t)\|^2_{L^2}\le P^2\|u\|^2_{W^2_{\rm bd}(\mathbb{R})} \tag{4.16}$$

для некоторой положительной константы P, и, следовательно, существенное множество $\mathcal{K}$ этой системы содержит $\{(\cos t,\sin t)\}\times\mathbb{L}_{R/P}$ в качестве подмножества. С другой стороны, это уравнение удовлетворяет условиям (0.5) и (0.7) при $H=\mathbb{R}^2\times L^2(\omega)$, $A=\operatorname{diag}\{1,1,-\partial_x^2\}$, $\gamma=0$ и

$$F=\begin{pmatrix} 2(|w|^2w-3w)/(1+|w|^4) \\ \phi_R\big(\|u\|^2_{H^1(\omega)}{+}\|\dot u\|^2_{L^2(\omega)}\big)\big[\widehat L_1(w_1,w_2)u{+}\widehat L_2(w_1,w_2)\dot u\big]\end{pmatrix}.$$

Действительно, из определения операторов $\widehat L_i$, $i=1,2$, следует, что

$$\|\widehat L_1(w_1,w_2)u\|_{L^2}+\|\widehat L_2(w_1,w_2)\dot u\|_{L^2}\le C\left(\|u\|_{H^1}+\|\dot u\|_{L^2}\right),$$

где константа C не зависит от w, и, следовательно, $\|F(w,u,\dot u)\|_{L^2}\le C'_R$, где C'_R не зависит от w, u и $\dot u$. Таким образом, условия (0.5)(c) и (0.5)(d) проверены. Аналогично, из гладкости $\widehat L_i$ по w и выбора срезающей функции ϕ_R следует, что

$$\|\operatorname{D}_w F(w,u,\dot u)\|_{\mathbb{R}^2\to H}+\|\operatorname{D}_u F(w,u,\dot u)\|_{H^1\to H}+\|\operatorname{D}_{\dot u} F(w,u,\dot u)\|_{H^0\to H}\le C''_R,$$

где C''_R также не зависит от w, u и $\dot u$. Поэтому, условия (0.5)(a) и (0.7) также выполняются. Остается заметить, что условие (0.5)(b) также является немедленным следствием последней оценки.

Итак, мы доказали, что нелинейность $F(w,u,\dot u)$ действительно удовлетворяет условиям (0.5) и (0.7) и, следовательно, уравнение (4.5) удовлетворяет условиям теорем 2.7 и 3.6. В частности, объединив утверждения теоремы 3.6 и леммы 4.3, получим следующую двустороннюю оценку для ε-энтропии его аттрактора.

Теорема 4.4. *Уравнение* (4.15) *обладает траекторным аттрактором* $\mathcal{A}^{\rm traj}$, *и существуют положительные константы* T_0,ε_0,C_1 *и* C_2, *такие что* ε*-энтропия* $\mathcal{A}^{\rm traj}$ *удовлетворяет оценкам*

$$C_1T\ln\frac1\varepsilon\le\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}^{\rm traj}\big|_{(0,T)},W^2_{\rm bd}((0,T)))\le C_2(T+\ln\frac1\varepsilon)\ln\frac1\varepsilon \tag{4.17}$$

для $T\ge T_0$ *и* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Заметим, что левая часть оценки (4.17) точна при $T\ge\ln\frac1\varepsilon$, но далека от оптимальной при $T\ll\ln\frac1\varepsilon$. В частности, (4.17) не дает никакой информации об энтропии глобального аттрактора $\mathbb{A}$ на сечении. Следующая теорема дает оценку снизу для энтропии глобального аттрактора в случае, когда траекторный аттрактор удовлетворяет оценке (4.17).

Theorem 4.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.7 и пусть ε-энтропия аттрактора $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$ уравнения* (0.4) *удовлетворяет* (4.17). *Тогда существуют положительные константы C и ε_0, такие что энтропия глобального аттрактора $\mathbb{A}$, построенного в теореме 2.7, допускает оценку*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathbb{A}, \mathbb{H}^{3/2}) \geq C\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3/2} \quad \textit{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{4.18}$$

Доказательство. Действительно, так как решения, принадлежащие $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$, равномерно ограничены: $\|(u(t), \dot{u}(t))\|_{\mathbb{H}^1} \leq B_*$, то из оценки (2.9) следует, что

$$\|(u_1-u_2, \dot{u}_1-\dot{u}_2)\|_{C([0,t],\mathbb{H}^1)} \\ \leq \|(u_1(0)-u_2(0), \dot{u}_1(0)-\dot{u}_2(0))\|_{\mathbb{H}^1}^{1-t/T} B_*^{t/T} e^{2M(M+4/T)t(T-t)}$$

для любого $t < T$. Зафиксировав в этой оценке $T = 2t$ и предположив без ограничения общности, что $t, M \geq 1$, получим

$$\mathbf{H}_{\mu(\varepsilon)}(\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}, C([0,t], \mathbb{H}^1)) \leq \mathbf{H}_\varepsilon(\mathbb{A}, \mathbb{H}^1) \quad \text{где } \mu(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} B_*^{1/2} e^{20M^2t^2}.$$

После замены t на T и применения оценки снизу (4.17) к левой части неравенства (4.24) мы получим неравенство

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathbb{A}, \mathbb{H}^1) \geq C_1 T \ln \mu(\varepsilon) = C_1 T\Big(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\ln B_* - 20M^2T^2\Big).$$

Максимизируя правую часть этого неравенства по T (то есть, фиксировав $T := \frac{1}{10M}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}$), мы выведем оценку (4.18). Теорема 4.5 доказана.

§5 Хаос в пространственных динамических системах.

В этом параграфе мы дадим интерпретацию результатов, полученных в предыдущих параграфах, в духе теории динамических систем. Для этого нам необходимо напомнить некоторые количественные характеристики динамической сложности, используемые в теории ДС. Мы начнем с классического понятия топологической энтропии (см., например, [KaH95]).

Определение 5.1. Пусть (M, d) – компактное метрическое пространство, а $S_h : M \to M$, $h \in \mathbb{R}^+$, – непрерывная полугруппа, действующая в нем. Для любого $R > 0$ определим новую метрику d_R в M следующим образом:

$$d_R(m_1, m_2) := \sup\nolimits_{h \leq R} d(S_h m_1, S_h m_2), \quad m_1, m_2 \in M. \tag{5.1}$$

Тогда, очевидно, что (M, d_R) также является компактным метрическим пространством. Топологической энтропией полугруппы S_h в M называется число

$$h_{\mathrm{top}}(S_h, M) := \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R}\mathbf{H}_\varepsilon(M, d_R), \tag{5.2}$$

где символ $\mathbf{H}_\varepsilon(M, d_R)$ обозначает ε-энтропию множества M в метрике (5.1).

Известно (см. [KaH95]), что топологическая энтропия (5.2) не зависит от выбора метрики d в M, а зависит только от топологии пространства M.

Для того, чтобы применить общее определение 5.1 к исследованию траекторной ДС (2.1), необходимо фиксировать какую-нибудь метрику в $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$. Для этого нам понадобится следующее простое предложение.

Предложение 5.2. *Пусть весовая функция $\phi \in C_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям $\lim_{|t|\to\infty}\phi(t) = 0$ и $\phi(t) > 0$. Тогда топология, индуцированная в $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$ вложением $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}} \subset W^2_{\mathrm{bd},\phi}(\mathbb{R}^+)$, совпадает с локальной топологией, индуцированной вложением $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}} \subset W^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.*

Действительно, предложение 5.2 является немедленным следствием ограниченности множества $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$ в $W^2_{\mathrm{bd}}(\mathbb{R}^+)$.

Зафиксируем теперь произвольную весовую функцию ϕ, удовлетворяющую условиям предложения 5.2, и определим метрику в $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$ по формуле

$$d_\phi(u_1, u_2) := \|u_1 - u_2\|_{W^2_{\mathrm{bd},\phi}(\mathbb{R}^+)}, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}. \tag{5.3}$$

Тогда, согласно теореме 2.4 и предложению 5.2, $(\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}, d_\phi)$ – компактное метрическое пространство, и можно определить топологическую энтропию $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}})$ траекторной динамической системы (2.1) по формуле (5.2). Следующее предложение дает более удобную формулу для ее вычисления.

Предложение 5.3. *Топологическая энтропия $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}})$ не зависит от выбора весовой функции ϕ и вычисляется по следующей формуле:*

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbf{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}\big|_{(0,T)}, W^2_{\mathrm{bd}}(0,T)\right). \tag{5.4}$$

Доказательство формулы (5.4) более или менее очевидно и дано, например, в работе [Zel00].

Заметим теперь, что, в отличие от от классических ДС, порожденных ОДУ или большинством естественных УрЧП в ограниченных областях (см., например, [Tem88]), в нашем случае топологическая энтропия может быть бесконечной. В частности, это так в случае системы (4.15).

Следствие 5.4. *Топологическая энтропия ДС $(T_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}})$, порожденной уравнением* (4.15), *бесконечна:*

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}) = \infty. \tag{5.5}$$

Действительно, (5.5) является немедленным следствием (5.4) и (4.17).

Напомним, что ДС с бесконечной топологической энтропией естественно возникают при изучении пространственной и динамической сложности аттракторов $\mathcal{A}^{\mathrm{glob}}$ эволюционных УрЧП в *неограниченных* областях, в частности, уравнений вида (0.13) (см., например, [Zel00,Zel00a]). Таким образом, вспомнив о вложении (0.14), естественно применить методы, разработанные там, для изучения траекторной ДС (2.1). Мы начнем с формулировки одного из возможных обобщений понятия топологической энтропии (см. [LiW00], [Zel00]).

Определение 5.5. Пусть (M, d) – компактное метрическое пространство, а $S_h : M \to M$ – полугруппа в нем. Тогда модифицированная топологическая энтропия полугруппы S_h определяется следующим образом:

$$\widehat{h}_{\mathrm{top}}(S_h, (M,d)) := \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R}\mathbf{H}_\varepsilon(M, d_R), \tag{5.6}$$

где метрика d_R определяется по формуле (5.1). Более того, следуя [LiW00], введем среднюю топологическую размерность $\dim_{\mathrm{top}}$ по формуле

$$\dim_{\mathrm{top}}(S_h, M) := \inf_{\widehat{d}} \widehat{h}_{\mathrm{top}}(S_h, (M, \widehat{d})), \tag{5.7}$$

где нижняя грань берется по всем метрикам $\widehat{d}$ в M, которые порождают ту же самую топологию в M, что и метрика d.

В отличие от топологической энтропии, выражение (5.6) сохраняется только при липшицевых гомеоморфизмах (как и фрактальная размерность). Это и является причиной введения величины (5.7), которая так же, как и классическая топологическая энтропия, является топологическим инвариантом.

Итак, зафиксировав весовую функцию ϕ, удовлетворяющую условиям предложения 5.2, и определив метрику d_ϕ в $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$ по формуле (5.3), можно определить модифицированную топологическую энтропию $\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, (\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}, d_\phi))$ и среднюю топологическую размерность $\dim_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}})$ траекторной ДС (2.1) по формулам (5.6) и (5.7). (Подчеркнем, что нижняя грань в (5.7) берется не только по метрикам вида (5.3), а по *всем* метрикам в $\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$, задающим локальную топологию).

Следующее утверждение является аналогом предложения 5.3.

Предложение 5.6. *Модифицированная топологическая энтропия траекторной ДС* (2.1) *не зависит от выбора веса* ϕ *и вычисляется по формуле*

$$\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, (\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}, d_\phi)) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathbf{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}^{\mathrm{traj}}\big|_{(0,T)}, W^2_{\mathrm{bd}}(0,T)\right). \tag{5.8}$$

Доказательство (5.8) аналогично доказательству (5.4) (см. [Zel00]).

Выражение в правой части (5.8) интерпретировано в работе [CoE99] как (фрактальная) размерность аттрактора на единицу объема (см. (3.4)). Конечность и положительность этой величины для аттракторов $\mathcal{A}^{\mathrm{glob}}$ большого класса эволюционных УрЧП в неограниченных областях доказана в [CoE99,Zel00,Zel01,Zel01a,EfZ02]. Следующий результат показывает, что эта величина может быть строго положительной и в случае аттракторов уравнений вида (0.4).

Следствие 5.7. *При выполнении условий теоремы 2.4 модифицированная топологическая энтропия траекторной ДС* (2.1) *конечна*

$$\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}) \le C < \infty. \tag{5.9}$$

Более того, эта величина строго положительна для уравнения (4.15)*:*

$$0 < C_1 \le \widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}) \le C < \infty. \tag{5.10}$$

Действительно, оценка (5.9) немедленно следует из (5.8) и (3.7), а оценка (5.10) – из (4.17).

Напомним, что в классической теории ДС для изучения хаотической динамики обычно используются гомеоморфные вложения схем Бернулли в исследуемую ДС (см. [KaH95] и цитируемую там литературу). Заметим однако, что классические схемы Бернулли с *конечным* числом символов имеют *конечную* топологическую энтропию и, следовательно, не могут рассматриваться как адекватная модель для исследования случая бесконечной энтропии. В этом случае естественно использовать схемы Бернулли с *бесконечным* числом символов.

Определение 5.8. Пусть $\mathcal{M} := [-1,1]^{\mathbb{Z}}$ – компактное метрическое пространство, наделенное тихоновской топологией. Напомним, что $\mathcal{M}$ состоит из функций $v : \mathbb{Z} \to [-1,1]$, а топология в нем порождается стандартной метрикой:

$$d(v_1, v_2) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-|i|} |v_1(i) - v_2(i)|. \tag{5.11}$$

Определим модельную ДС $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$ сдвигов в $\mathcal{M}$ по формуле

$$(\mathcal{T}_l v)(i) := v(i + l), \quad i, l \in \mathbb{Z}, \quad v \in \mathcal{M}. \tag{5.12}$$

Известно, что $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_l, \mathcal{M}) = \infty$ и $\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_l, (\mathcal{M}, d)) = \dim_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_l, \mathcal{M}) = 1$.

Следующая теорема дает вложение ДС $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$ в траекторную ДС, порожденную уравнением (4.15).

Теорема 5.9. *Пусть $\mathcal{K}$ – существенное множество уравнения* (4.15). *Тогда существует гомеоморфное вложение $\kappa : \mathcal{M} \to \mathcal{K}$, такое что*

$$\mathcal{T}_{Tl} \kappa(v) = \kappa(\mathcal{T}_l v), \quad l \in \mathbb{Z}, \ v \in \mathcal{M}, \tag{5.13}$$

где $T > 0$ – период, введенный в теореме 4.1 (и фиксированный как $T := 2\pi$ в (4.13)*). Более того, это вложение липшицево в следующем смысле:*

$$C_1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-T|i|} |v_1(i) - v_2(i)| \le \\ \le \|\kappa(v_1) - \kappa(v_2)\|_{W^2_{\mathrm{bd}, e^{-|t|}}(\mathbb{R})} \le C_2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-T|i|} |v_1(i) - v_2(i)|. \tag{5.14}$$

Доказательство. По построению уравнения (4.15), множество $\mathbb{L}_R$, определенное в (4.4) и (4.8), содержится в $\mathcal{K}$ для некоторого $R > 0$. Следовательно, достаточно построить вложение $\kappa : \mathcal{M} \to \mathbb{L}_R$. Мы утверждаем, что такое вложение задается формулой

$$\kappa(v)(t) := R \sum_{i=-\infty}^{\infty} v(i) u(t - iT), \quad v \in \mathcal{M}, \tag{5.15}$$

где $u(t)$ – решение, построенное в теореме 4.1. Действительно, формула (5.13) немедленно следует из (5.15). Таким образом, остается проверить оценки (5.14). Аналогично (4.7) доказывается, что

$$\|\kappa(v)\|_{W^2(\tau)} \le C \sum_{i=\infty}^{\infty} |v(i)| e^{-(\tau - iT)^2/2} \text{ при } \tau \in \mathbb{R}.$$

Правая часть оценки (5.14) является немедленным следствием этого неравенства. Для проверки его левой части мы напомним, что, согласно теореме 4.1, первый коэффициент Фурье $u_1(t)$ решения $u(t)$ имеет конечный носитель $\operatorname{supp} u_1 \subset [0, T]$. Поэтому,

$$\|\kappa(v)\|_{W^2(\tau)} \geq \|\langle \kappa(v), e_1\rangle\|_{W_2^2(\tau,\tau+1)} = |v([\tau/T])| \cdot \|u_1\|_{W_2^2(0,1)} \geq C|v([\tau/T])|.$$

Левая часть неравенства (5.14) является элементарным следствием этой оценки. Теорема 5.9 доказана.

Напомним, что уравнение (4.15) удовлетворяет условиям теоремы 2.7, поэтому траекторная ДС (2.1) топологически сопряжена с ДС $(\mathbb{S}_h, \mathbb{K})$ на сечении, определенной по формуле (2.17). Следующий результат является аналогом теоремы 5.9 для этой ДС.

Следствие 5.10. *Пусть* $\mathbb{A} = \Pi_0 \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}$ *– глобальный аттрактор уравнения* (4.15). *Тогда существует гомеоморфное вложение* $\widehat{\kappa} : \mathcal{M} \to \mathbb{A}$, *такое что*

$$\mathbb{S}_{Tl}\widehat{\kappa}(v) = \widehat{\kappa}(\mathcal{T}_l v) \text{ для любых } l \in \mathbb{Z} \text{ и } v \in \mathcal{M}. \tag{5.16}$$

Более того, этот гомеоморфизм сохраняют величины (5.6) *и* (5.7), *то есть*

$$\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{S}_h, \widehat{\kappa}(\mathcal{M})) = T^{-1}\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_l, \mathcal{M}), \quad dim_{\mathrm{top}}(\mathbb{S}_h, \widehat{\kappa}(\mathcal{M})) = T^{-1} dim_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_l, \mathcal{M}). \tag{5.17}$$

Доказательство. Согласно следствию 2.6, оператор следа $\Pi_0 : \mathcal{K} \to \mathbb{A}$ задает гельдеров гомеоморфизм, константа Гельдера которого сколь угодно близка к единице, при соответствующем выборе весовой функции в $\mathcal{K}$ (см. (2.21) и (2.22)). Определим гомеоморфизм $\widehat{\kappa} := \Pi_0 \circ \kappa$. Действительно, (5.16) является немедленным следствием (5.13). Так как средняя топологическая размерность является топологическим инвариантом, то второе равенство (5.17) очевидно. Фактор T^{-1} возникает из-за перенормировки "времени" (полугруппа $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$ сопряжена $(\mathcal{T}_{Tl}, \mathcal{K})$ посредством κ). Для того, чтобы проверить первое равенство (5.17), напомним, что κ липшицево в смысле (5.14). Поэтому, из инвариантности модифицированной топологической энтропии при липшицевых гомеоморфизмах и того факта, что (5.6) не зависит от выбора весовой функции ϕ, удовлетворяющей условиям предложения 5.2, в метрике (5.3) следует, что

$$\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \kappa(\mathcal{M})) = T^{-1}\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_l, \mathcal{M}). \tag{5.18}$$

Аналогично, так как Π_0 гельдеров с константой Гельдера сколь угодно близкой к единице, то $\widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \kappa(\mathcal{M})) = \widehat{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{S}_h, \widehat{\kappa}(\mathcal{M}))$. Следствие 5.10 доказано.

Следствие 5.11. *Средняя топологическая размерность ДС, порожденной уравнением* (4.15), *строго положительна:*

$$dim_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{traj}}) = dim_{\mathrm{top}}(\mathbb{S}_h, \mathbb{A}) \geq T^{-1} > 0. \tag{5.19}$$

Действительно, как известно (см. [LiW00]), $\dim_{\mathrm{top}}(\mathcal{T}_l, \mathcal{M}) = 1$. Поэтому оценка (5.19) является следствием (5.17).

Следующий результат показывает, что любая конечномерная динамика может быть реализована с точностью до гомеоморфизма, ограничивая $\mathbb{S}_h$ на соответствующее инвариантное множество аттрактора $\mathbb{A}$ уравнения (4.15).

Следствие 5.12. *Пусть $\mathbb{A}$ – глобальный аттрактор уравнения (4.15), $K \subset \mathbb{R}^N$ – произвольный компакт и $F : K \to K$ – произвольный гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфное вложение $\tau : K \to \mathbb{A}$, такое что*

$$\mathbb{S}_{NT} \circ \tau(k) = \tau(Fk) \text{ для любого } k \in K. \tag{5.20}$$

Доказательство. Действительно, благодаря следствию 5.10, достаточно вложить ДС (F, K) в $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$. Более того, без ограничения общности можно предположить, что $K \subset [-1,1]^N$. Тогда необходимое вложение задается формулой

$$\tilde\tau(k)(i) := (F^{(m)}(k))_j, \quad i = mN + j, \quad m, j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le j \le N-1, \tag{5.21}$$

где через $F^{(m)}$ обозначена mтая итерация отображения F, $(k)_j$ – jтая координата точки $k \in [-1,1]^N$. Тогда отображение $\tau := \widehat{\kappa} \circ \tilde\tau$, очевидно, удовлетворяет всем условиям следствия.

Замечание 5.13. Напомним, что абстрактное эллиптическое уравнение (0.4) может быть формально интерпретировано как эволюционное уравнение второго порядка. Более того, эта интерпретация частично оправдывается (при выполнении условий теоремы 2.7) построением по уравнению (0.4) непрерывной ДС $(\mathbb{S}_h, \mathbb{K})$. Но, в отличии от случая эволюционных уравнений, ДС, порождаемые эллиптическими уравнениями, *не являются липшицевыми* в общем случае (мы не можем взять $\alpha = 0$ в (2.18)), а только гельдеровы с константой Гельдера, сколь угодно близкой к единице (как в случае уравнения (4.15)). Отсутствие липшицевости позволяет таким системам иметь бесконечномерные аттракторы с бесконечной топологической энтропией. Более того, можно показать, рассуждая стандартным образом, что, если некоторое уравнение, удовлетворяющее условиям теоремы 2.7, допускает также свойство липшицевости в виде

$$\|\mathbb{S}_h(z_1) - \mathbb{S}_h(z_2)\|_{\mathbb{H}^1} \le Q_h(\|z_1\|_{\mathbb{H}^{3/2}} + \|z_2\|_{\mathbb{H}^{3/2}})\,\|z_1 - z_2\|_{\mathbb{H}^1}, \quad z_i \in \mathbb{K},$$

то его глобальный аттрактор имеет конечную фрактальную размерность, а значит, его топологическая энтропия также конечна (как и в случае эволюционных уравнений).

Замечание 5.14. Заметим, что, как и в случае классических ДС, наше вложение схемы Бернулли в траекторную ДС, порожденную уравнением (4.15), основано на нахождении подходящей гомоклинической орбиты. Действительно, решение $t \mapsto (\sin t, \cos t, u(t))$, где $u(t)$ – функция, построенная в теореме 4.1, является гомоклинической орбитой по отношению к 2π-периодическому решению $t \mapsto (\sin t, \cos t, 0)$. Но, в отличии от классического случая, в нашей ситуации мы можем суммировать пространственные сдвиги исходной гомоклинической орбиты не только с коэффициентами из $\{0,1\}$, но из интервала $[-1,1]$ (см. (5.15)). Более того, теорема 5.9 показывает, что периодическая орбита $(\sin t, \cos t, 0)$ является "бесконечно вырожденной". Действительно, в его окрестности имеется однопараметрическое семейство 2π-периодических орбит, которые параметризуется константами $v_\varepsilon \in \mathcal{M}$,

$\varepsilon \in [-1,1]$ (то есть, $v_\varepsilon(i) \equiv \varepsilon$ при $i \in \mathbb{Z}$). Аналогично, имеется двупараметрическое семейство 4π-периодических решений, трехпараметрическое семейство 6π-периодических решений и т. д. Замыкание этого огромного количества периодических орбит и дает вложение схемы Бернулли $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$, построенное в теореме 5.9.

Замечание 5.15. Гомеоморфные вложения модельной ДС $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$ в пространственную ДС $(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}^{\mathrm{glob}})$, действующую на аттракторе, были построены в работах [Zel00,Zel00a] для весьма широкого класса систем уравнений реакции-диффузии вида (0.13). Более того, из предложенной там конструкции следует, что образ $\mathcal{M}$ лежит в сильно неустойчивом многообразии (по отношению к эволюционной переменной) некоторого пространственно однородного положения равновесия рассматриваемого эволюционного уравнения. Теорема 5.9 показывает, что для некоторых эволюционных уравнений в неограниченных областях пространственно-хаотическое поведение этого типа может быть обнаружено и на множестве положений $\mathcal{K}$ равновесия, которое априори существенно меньше чем $\mathcal{A}^{\mathrm{glob}}$.

Литература

[AgN67] S. Agmon, L. Nirenberg, *Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 207–229.

[Bab95a] А.В. Бабин, *Аттрактор обобщенной полугруппы, порожденной эллиптическим уравнением в цилиндрической области*, Изв. РАН **44** (1995), 207–223.

[Bab95b] A.V. Babin, *Inertial manifolds for traveling-wave solutions of reaction-diffusion systems*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 167–198.

[BaV89] А.В. Бабин, М.И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука: Москва, 1989.

[BrM96] T.J. Bridges, A. Mielke, *Instability of spatially–periodic states for a family of semilinear PDEs on an infinite strip*, Math. Nachr. **179** (1996), 5–25.

[ChV98] В.В. Чепыжов, М.И. Вишик, *Колмогоровская ε-энтропия аттрактора уравнения реакции-диффузии*, Мат. Сборник **189(2)** (1998), 81–110.

[ChV97] V.V. Chepyzhov, M.I. Vishik, *Evolution equations and their trajectory attractors*, J. Math. Pures Appl. **76** (1997), 913–964.

[CMS93] À. Calsina, X. Mora, J. Solà–Morales, *The dynamical approach to elliptic problems in cylindrical domains, and a study of their parabolic singular limit*, J. Diff. Eqns. **102** (1993), 244–304.

[CoE99] P. Collet, J.–P. Eckmann, *Extensive properties of the complex Ginzburg–Landay equation.*, Commun. Math. Phys. **200** (1999), 699–722.

[CoE00] P. Collet, J.–P. Eckmann, *Topological entropy and ε–entropy for damped hyperbolic equations.*, Ann. Henri Poincaré **1** (2000), 715–752.

[CSV97] À. Calsina, J. Solà–Morales, M. València, *Bounded solutions of some nonlinear elliptic equations in cylindrical domains*, J. Dynam. Diff. Eqns. **9** (1997), 343–372.

[DFKM96] G. Dangelmayr, B. Fiedler, K. Kirchgässner, A. Mielke, *Dynamics of nonlinear waves in dissipative systems: reduction, bifurcation and stability. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 352.*, Longman, Harlow, 1996.

[EfZ01] M.A. Efendiev, S.V. Zelik, *The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system in an unbounded domain*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), no. 6, 625–688.

[EfZ02] M.A. Efendiev, S.V. Zelik, *Upper and Lower Bounds for the Kolmogorov Entropy of the Attractor for an RDE in an Unbounded domain.*, J. Dyn. Diff. Eqns. **14** (2002), no. 2, 369–403.

[FSV98] B. Fiedler, A. Scheel, M.I. Vishik, *Large patterns of elliptic systems in infinite cylinders*, J. Math. Pures Appl. **77 (9)** (1998), 879–907.

[GrT97] M.D. Groves, J.F. Toland, *On variational formulations for steady water waves*, Arch. Rational Mech. Anal. **137** (1997), 203–226..

[IoK92] G. Iooss, K. Kirchgässner, *Water waves for small surface tension: an approach via normal form*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **122** (1992), 267–299.

[**IoM91**] G. Iooss, A. Mielke, *Bifurcating time-periodic solutions of Navier-Stokes equations in infinite cylinders.*, J. Nonlinear Sci. **1** (1991), 107–146.

[**KaH95**] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995.

[**Kir82**] K. Kirchgässner, *Wave–solutions of reversible systems and applications*, J. Diff. Eqns. **45** (1982), 113–127.

[**KoT59**] А.Н. Колмогоров, В.М. Тихомиров, ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах, УМН **т. XIV, вып.2(86)** (1959), 3–86.

[**LiW00**] E. Lindenstraus, B. Weiss, *Mean topological dimension*, Israel J. Math **115** (2000), 1–24.

[**Mie88**] A. Mielke, *Reduction of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications*, Math. Methods Appl. Sci. **10** (1988), 51–66.

[**Mie90**] A. Mielke, *Normal hyperbolicity of center manifolds and Saint–Venant's principle*, Arch. Rational Mech. Anal. **110** (1990), 353–372.

[**Mie91**] A. Mielke, *Hamiltonian and Lagrangian flows on center manifolds. With applications to elliptic variational problems. Lecture Notes in Mathematics Vol.* **1489**, Springer–Verlag, Berlin, 1991.

[**Mie92**] A. Mielke, *On nonlinear problems of mixed type: a qualitative theory using infinite–dimensional center manifolds*, J. Dynamics Diff. Eqns. **4** (1992), 419–443.

[**Mi94a**] A. Mielke, *Floquet theory for, and bifurcations from spatially periodic patterns*, Tatra Mt. Math. Publ. **4** (1994), 153–158.

[**Mi94b**] A. Mielke, *Essential manifolds for an elliptic problem in an infinite strip*, J. Diff. Eqns. **110** (1994), 322–355.

[**Mi97**] A. Mielke, *The complex Ginzburg–Landau equation on large and unbounded domains: sharper bounds and attractors*, Nonlinearity **10** (1997), 199–222.

[**Mi00**] A. Mielke, *Exponentially weighted* L^∞*–estimates and attractors for parabolic systems on unbounded domains*, In "International Conference on Differential Equations (EQUADIFF 99) Berlin 1999, B. Fiedler, K. Gröger, J. Sprekels (eds), World Scientific 2000", 641–646.

[**MiS95**] A. Mielke, G. Schneider, *Attractors for modulation equations on unbounded domains — existence and comparison*, Nonlinearity **8** (1995), 743–768.

[**PSS97**] D. Peterhof, B. Sandstede, A. Scheel, *Exponential dichotomies for solitary-wave solutions of semilinear elliptic equations on infinite cylinders*, J. Diff. Eqns **140** (1997), 266–308.

[**SVWZ99**] B.–W. Schulze, M.I. Vishik, I. Witt, S.V. Zelik, *The trajectory attractor for a nonlinear elliptic system in a cylindrical domain with piecewise smooth boundary*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. **23** (1999), 125–166.

[**Tem88**] R. Temam, *Infinite–dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer–Verlag, New-York, 1988.

[**Tri78**] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[**ViZ96**] М.И. Вишик, С.В. Зелик, *Траекторный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области*, Мат. Сборник **187** (1996), 21–56.

[**ViZ99**] М.И. Вишик, С.В. Зелик, *Регулярный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области*, Мат. Сборник **190 (6)** (1999), 23–58.

[**Zel99**] С.В. Зелик, *Аттрактор нелинейной системы реакции-диффузии в* $\mathbb{R}^n$ *и оценки его* ε*-энтропии*, Мат. Заметки **65 (6)** (1999), 941–943.

[**Zel00**] S.V. Zelik, *The attractors of reaction–diffusion systems in unbounded domains and their spatial complexity*, DANSE Preprint 32/00, (2000).

[**Zel00a**] S.V. Zelik, *Spatial and dynamical chaos generated by reaction diffusion systems in unbounded domains*, DANSE Preprint 38/00, (2000).

[**Zel01**] S.V. Zelik, *The attractor for a nonlinear hyperbolic equation in an unbounded domain*, Disc. Cont. Dyn. Sys. Ser. A **7** (2001), no. 3, 593–641.

[**Zel01a**] S.V. Zelik, *The attractor for an nonlinear reaction–diffusion system in an unbounded domain and Kolmogorov's* ε*–entropy*, Matem. Nachr. **232** (2001), no. 1, 129–179.