ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ-ХИЛЛА С ДИССИПАЦИЕЙ И ОЦЕНКИ ЕГО ИНДЕКСА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Зелик С. В.

Глава 0. Введение.

Многие задачи теории параметрических колебаний распределенных систем (см. [1]), а также некоторые задачи теории аттракторов (см. [2]) сводятся к исследованию операторного уравнения Матье-Хилла

$$\partial_t^2 u + Au + f(t)u = 0 \tag{1}$$

в бесконечномерном гильбертовом пространстве, в котором A является самосопряженным положительно определенным оператором с компактным обратным, а оператор $f(t)$ является периодическим по времени и удовлетворяет естественным условиям подчиненности оператору A.

Системы вида (1) изучались многими авторами [1], [3], [4], [5]

Как показано в работе [6], в бесконечномерном случае естественно считать резонансным не всякое неограниченное решение (1), а лишь то, которое экспоненциально растет при $t \to \infty$ (то есть его показатель Ляпунова больше некоторого положительного γ). С математической точки зрения такой подход эквивалентен введению в уравнение (1) диссипативного члена $2\gamma\partial_t u$.

$$\partial_t^2 u + 2\gamma\partial_t u + Au + f(t)u = 0 \tag{2}$$

Данная работа посвящена исследованию динамики неустойчивых решений системы (2) и ее зависимости от диссипативного параметра γ. Для описания этой динамики вводится понятие индекса неустойчивости $N = N(\gamma)$ системы (2), то есть коразмерности подпространства ограниченных решений в пространстве всех ее решений. Как будет показано в главе 2, для весьма широкого класса операторов $f(t)$ индекс неустойчивости $N(\gamma) < \infty$, а поведение неустойчивых решений (2) при $t \to \infty$

Работа была выполнена при поддержке Немецкого Математического Общества

определяется некоторой конечномерной системой порядка $N(\gamma)$ линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, построенной по системе (2).

Целью данной статьи является получение оценки индекса $N(\gamma)$ в зависимости от спектральных свойств оператора A и норм оператора f в соответствующей A шкале гильбертовых пространств. Для получения этой оценки к уравнению (2) применяется математический аппарат, разработанный в теории аттракторов [2], [7], [8].

В работе получена асимптотическая по $\gamma \to 0$ оценка вида $N(\gamma) \le C\gamma^{-p}$ и построены примеры динамических систем вида (2), для которых справедлива и обратная оценка

$$C_2\gamma^{-p} \le N(\gamma) \le C_1\gamma^{-p}$$

Кроме этого, в главе 3 предложена новая схема оценки коэффициента изменения n-мерных объемов под действием разрешающего оператора задачи (2), представляющая интерес и для теории аттракторов.

Некоторая модификация традиционной схемы оценки этих коэффициентов приведена в главе 4, где она применяется для улучшения оценки $N(\gamma)$ в случае дополнительной гладкости оператора f.

Качественные характеристики спектра разрешающего оператора задачи (2) исследуются в главе 5.

Приложения полученных результатов к различным уравнениям математической физики рассмотрены в главе 6.

Глава 1. Разрешающий оператор и его основные свойства.

Введем некоторые обозначения. Пусть H — гильбертово пространство, $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ — скалярное произведение в нем, $A : D(A) \to H$ — положительно определенный самосопряженный оператор, обратный к которому компактен. По оператору A, как обычно, строится шкала гильбертовых пространств H_s, $s \in \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_s = \|A^{s/2}\cdot\|$ и энергетическое пространство $E = H_1 \times H$.

Определение 1. *Назовем семейство операторов $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, действующих из H_α в H_β, $\alpha > \beta$ равномерно компактным, если*

$$\forall\varepsilon \quad \exists C = C(\varepsilon), \quad \|f(t)x\|_\beta \le \varepsilon\|x\|_\alpha + C\|x\|_\beta\ , \quad x \in H_\alpha \tag{1}$$

причем константа C не зависит от t.

Замечание 1. Известно, что оператор f, не зависящий от времени, компактен тогда и только тогда, когда выполнено условие (1).

Замечание 2. Так как вложение $H_{p_1} \subset H_{p_2}$ вполне непрерывно при $p_1 > p_2$, то условие (1) будет заведомо выполнено, если f принадлежит пространству $C[\mathbb{R}, L(H_{\alpha-\theta}, H_\beta)]$ при некотором малом $\theta > 0$.

В пространстве H рассматривается следующая задача

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + Au + f(t)u = 0 \\ u|_{t=0} \in H_1 \,, \ \partial_t u|_{t=0} \in H \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициент рассеяния энергии $\gamma > 0$, а на операторы $f(t)$ накладываются следующие условия

$$\begin{cases} 1. \text{ при любом } t \in \mathbb{R} \quad f(t) \text{ симметричен в } H \\ 2. \ f \text{ и } f'_t \text{ равномерно компактны из } H_1 \text{ в } H_{-1} \\ 3. \ f \text{ и } f'_t \text{ равномерно компактны из } H_2 \text{ в } H \end{cases} \tag{$*$}$$

Кроме этого, предполагается, что оператор f зависит от времени периодическим образом

$$f(t+T) \equiv f(t) \tag{3}$$

Исследование задачи (2) начнем с построения разрешающего оператора неоднородного уравнения.

Теорема 1. *Пусть* $h(t) \in L_2([0,T], H)$, $(u_0, v_0) \in E$ *и выполнены условия* $(*)$, *тогда задача*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + Au + f(t)u = h(t) \\ u|_{t=0} = u_0 \,, \ \partial_t u|_{t=0} = v_0 \end{cases} \tag{4}$$

однозначно разрешима в классе $C([0,T], E)$, *(то есть пара* $(u(t), \partial_t u) = \xi_u(t)$ *принадлежит классу* $C([0,T], E)$ *), причем это решение допускает следующую оценку*

$$\|\xi_u(t)\|_E^2 \le C\Big(\|\xi_u(0)\|_E^2 + \int_0^T \|h(t)\|^2 \, dt\Big) \tag{5}$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [9]. Таким образом, корректно определен оператор

$$\mathcal{U}(t) : E \to E \ , \quad \xi_u(t) = \mathcal{U}(t)\, \xi_u(0)$$

Основная цель данной главы — получить представление этого оператора в виде суммы сжимающего и компактного операторов

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{D}(t) \tag{6}$$

Для построения такого разложения рассмотрим в H вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + \gamma \partial_t v + Av + f(t)v + Mv = 0 \\ v|_{t=0} = u|_{t=0}\ ,\ \partial_t v|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} \end{cases} \tag{7}$$

с теми же начальными условиями (здесь $M = M(\gamma)$ — некоторое положительное число, которое будет определено ниже) и выберем в качестве $\mathcal{U}_0(t)$ разрешающий оператор этой задачи.

Теорема 2. *Существует такое $M_0 = M_0(\gamma)$, что для всех $M > M_0$ решение (7) допускает следующую оценку*

$$\|\xi_v(t)\|_E^2 \le Ce^{-\nu t}\|\xi_u(0)\|_E^2\ , \quad \nu > 0$$

Доказательство. Введем, следуя [2], функционал на пространстве E.

$$F(t, v, \partial_t v) = (Av + fv + Mv, v) + (\partial_t v, \partial_t v) + \eta(v, \partial_t v)$$

где $\eta > 0$ — достаточно малое число и оценим его производную вдоль решений задачи (7).

$$\begin{aligned} \partial_t F = -(2\gamma - \eta)\|\partial_t v\|^2 - \eta(Av + Mv + fv, v) - \eta\gamma(v, \partial_t v) + (f_t' v, v) \le \\ \le -\nu(\eta)F(t) + P \end{aligned}$$

где $\nu(\eta) = \frac{1}{2}\min(2\gamma - \eta, \eta)$

$$P(t) = -\nu\|\partial_t v\|^2 - \nu\|v\|_1^2 - M\nu\|v\|^2 + \eta(\nu - \gamma)(v, \partial_t v) + (f_t'(t)v, v)$$

Для оценки P воспользуемся условиями $(*)$. Обозначим через $L(\varepsilon)$ минимальное положительное число, для которого справедливы неравенства

$$\begin{cases} (f'(t)v, v) \le \varepsilon\|v\|_1^2 + L(\varepsilon)\|v\|^2 \\ (f(t)v, v) \le \varepsilon\|v\|_1^2 + L(\varepsilon)\|v\|^2 \end{cases} \tag{8}$$

(Существование такого L следует непосредственно из п.2 условий $(*)$)

Используя (8), получим (выбрав, например, $\eta = \gamma$)

$$P(t) \le (L(\gamma/2) - M\gamma/2 + 1)\|v\|^2$$

Таким образом, при $M_0 = \dfrac{2L(\gamma/2)+2}{\gamma}$ справедливо соотношение

$$\partial_t F(t) \le -\frac{\gamma}{2} F(t) \tag{9}$$

Введем теперь в пространстве E эквивалентную норму

$$\|\xi_v\|_*^2 = (Av, v) + M(v, v) + \|\partial_t v\|^2$$

где M выбирается так, чтобы неравенство (9) было выполнено. Тогда, используя (8) и неравенство Гронуола, нетрудно получить следующие оценки

$$\begin{cases} \|\xi_v(t)\|_* \le (1 + C\gamma) e^{-\gamma t/4} \|\xi_v(0)\|_* \\ M^{-1/2}\|\xi_v\| \le \|\xi_v\| \le \|\xi_v\|_* \le M^{1/2}\|\xi_v\| \end{cases} \tag{10}$$

где константа C не зависит от γ. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Оценки минимального $M = M(\gamma)$ в теореме 2, а также неравенства (10) будут использованы в главе 3 для оценки размерности подпространства неустойчивых решений задачи (2).

Пример. Предположим, что выполняется следующее условие

$$f,\ f'_t \in C(\mathbb{R}, L(H_{1-\theta}, H_{-1}))\ ,\ 0 < \theta \le 2 \tag{11}$$

Тогда, используя интерполяционное неравенство $\|v\|_{1-\theta} \le C\|v\|^{\theta}\|v\|_1^{1-\theta}$ нетрудно получить

$$L(\gamma) \le C\gamma^{1-2/\theta} \tag{12}$$

и, соответственно,

$$M(\gamma) \le C\gamma^{-2/\theta} \tag{13}$$

Приступим теперь к исследованию оператора $\mathcal{D}(t)$ в разложении (6). Очевидно, что функция $\xi_w(t) = \mathcal{D}(t)\,\xi_u(0)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\begin{cases} \partial_t^2 w + \gamma\partial_t w + Aw + f(t)w = Mv = M(u-w) \\ w|_{t=0} = 0\,,\ \partial_t w|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Используя теоремы 1 и 2, и, вспомнив, что $w = u - v$, получим следующую оценку

$$\|\xi_w(t)\|_*^2 \le M\|\xi_w(t)\|^2 \le 2M(\|\xi_u(t)\|^2 + \|\xi_v(t)\|^2) \le CM\|\xi_u(0)\|_*^2$$

Однако, справедливо более сильное утверждение.

Теорема 3. *Решение задачи* (14) *принадлежит пространству* $C(\mathbb{R}, E_1)$, *где* $E_1 = H_2 \times H_1$ *и удовлетворяет следующей оценке.*

$$\|w(t)\|_2^2 + \|\partial_t w\|_1^2 + \|\partial_t^2 w\| \le CM^2\|\xi_u(0)\|_*^2 \tag{15}$$

Доказательство. Проведем формальный вывод неравенства (15), обосновать который можно, например, с помощью галеркинских приближений. Обозначим $\theta = \partial_t w$ и продифференцируем (14) по t. Получим

$$\begin{cases} \partial_t^2\theta + \gamma\partial_t\theta + A\theta + f(t)\theta = M\partial_t v - f'(t)w \\ \theta|_{t=0} = 0\,,\ \partial_t\theta|_{t=0} = Mu(0) \end{cases} \tag{16}$$

Умножим (16) скалярно на $\partial_t\theta$.

$$\frac{1}{2}\,\partial_t(\|\partial_t\theta\|^2 + \|\theta\|_1^2 + (f(t)\theta,\theta)) + \gamma\|\partial_t\theta\|^2 = M(\partial_t v, \partial_t\theta) - (f'w, \partial_t\theta) - (f'\theta,\theta) \tag{17}$$

Слагаемые $(\partial_t v, \partial_t\theta)$ и $(f'\theta,\theta)$ оцениваются стандартным образом. Для получения оценки $(f'w, \partial_t\theta)$ выразим из (14) $Aw = Mv - \partial_t\theta - \gamma\theta - f(t)w$, откуда, используя п.3 условий $(*)$, получим

$$\|w(t)\|_2 \le CM\|\xi_u(0)\|_* + \|\partial_t\theta(t)\| \tag{18}$$

после чего $(f_t'w, \partial_t\theta)$ оценивается тривиально. Подставив эти оценки в (17) и применив неравенство Гронуола, получим

$$\|\partial_t\theta(t)\|^2 + \|\theta\|_1^2 \le Ce^{\alpha t}\|\xi_u(0)\|_*^2\,,\ \alpha > 0 \tag{19}$$

что вместе с неравенством (18) и доказывает теорему 3.

В пространстве $E_1 = H_2 \times H_1$ мы также введем эквивалентную норму

$$\|\xi_u\|_{1*}^2 = \|\partial_t u\|^2 + \|u\|_2^2 + M\|u\|_1^2 = \|A^{1/2}\xi_u\|_*^2$$

тогда неравенства (15) могут быть записаны в виде

$$\|\xi_w(t)\|_{1*}^2 \le Ce^{\alpha t}M^2\|\xi_u(0)\|_*^2$$

В дальнейшем, в главах 2 и 3, будет использоваться только $*$-норма в пространствах E и E_1, поэтому для удобства записи символ '$*$' далее опускается.

Итак, доказано, что разрешающий оператор задачи (2) допускает представление (6), причем нормы операторов $\mathcal{U}_0(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ оцениваются следующим образом

$$\begin{cases} \|\mathcal{U}_0(t)\xi\| \le (1 + C\gamma)e^{-\gamma t/4}\|\xi\|\,,\ \xi \in E \\ \|\mathcal{D}(t)\xi\|_1 \le Ce^{\alpha t}M\|\xi\| \end{cases} \tag{20}$$

где константы C и α не зависят от γ.

Глава 2. Конечность индекса неустойчивости в периодическом случае.

Заметим, что, согласно теореме 1.1, пространство всех решений задачи (1.2) можно отождествитть с пространством начальных условий задачи (1.2),то есть с E, а любое подпространство решений — с подпространством в E, поэтому корректно следующее определение.

Определение 1. *Индексом неустойчивости* $N = N(\gamma)$ *динамической системы* (1.2) *назовем коразмерность подпространства асимптотически устойчивых решений в пространстве всех решений* (1.2).

Основная задача данной главы — показать, что из условия периодичности (1.3) и разложения (1.6) следует конечность индекса неустойчивости $N(\gamma)$. Кроме этого, будет изучена структура неустойчивых решений задачи (1.2). Для достижения этой цели нам потребуется следующий результат из теории линейных несамосопряженных операторов.

Теорема 1. *Пусть оператор* $S \in L(E, E)$ *представлен в виде суммы сжимающего и компактного операторов, тогда пространство* E *разлагается в прямую сумму инвариантных относительно* S *подпространств* $E = E_+ \oplus E_-$, *таких что* $0 \le \dim E_+ \le \infty$, $\sigma(S|_{E_-}) \subset D$, $\sigma(S|_{E_+}) \subset \mathbb{C} \setminus D$, *где* $\sigma(S|_{E_\pm})$ *обозначает спектр сужения оператора* S *на* $E_\pm$, *а* $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$

Относительно доказательства этой теоремы см. [10], [11]

Определение 3. *Назовем оператором монодромии* S *динамической системы* (1.2) *оператор, который значению* $\xi_u(0)$ *ставит в соответствие* $\xi_u(T)$, T *— период, то есть* $S = \mathcal{U}(T)$ *в обозначениях главы 1.*

Из представления (1.6) следует, что для оператора монодромии S выполнены условия теоремы 1. Обозначим через P_+ и P_- ортопроекторы на подпространства $E_\pm$, существование которых установлено в теореме 1. Тогда, для исследования поведения решений (1.2) при $t \to \infty$ достаточно рассматривать начальные условия только из E_+ и из E_-.

Теорема 2. *Пусть* $\xi_u(0) \in E_-$, *тогда существует* $\alpha > 0$ *такое, что*

$$\|\xi_u(t)\| \le Ce^{-\alpha t}\|\xi_u(0)\|$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1 и формулы Гельфанда о спектральном радиусе.

Следствие. *Индекс неустойчивости динамической системы* (1.2) *конечен и равен размерности подпространства* E_+.

Рассмотрим случай $\xi_u(0) \in E_+$.

Теорема 3.

1. *В подпространстве* $E_+(t) = \mathcal{U}(t)E_+$ *существует периодический базис*
$$\psi(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\} \ , \ \psi_i(t+T) \equiv \psi_i(t) \tag{1}$$
2. *Разложим решение* $\xi_u(t) \in E_+(t)$ *по базису* $\psi(t)$,
$$\xi_u(t) = \sum x_i(t)\psi_i(t)$$
тогда вектор-функция $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *является решением линейного автономного уравнения*
$$\underline{x}(t) = Bx(t) \tag{2}$$
где B *удовлетворяет уравнению* $\exp(TB) = S_+$.

Доказательство. Для простоты ограничимся лишь случаем общего положения, когда оператор $S_+ = P_+S$ диагонализируем. Пусть e_1,...,e_n — собственный базис оператора S_+, то есть $S_+e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим эволюцию векторов e_i под действием динамической системы (1.2) $e_i(t) = \mathcal{U}(t)e_i$ и введем семейство операторов монодромии $S^{(t)}$ из формулы $\xi_u(t+T) = S^{(t)}\xi_u(t)$. Используя периодичность системы (1.2), выразим $S^{(t)}$ через S.
$$S^{(t)} = \mathcal{U}(t)\, S\, [\,\mathcal{U}(t)\,]^{-1} \tag{3}$$
Но из (3) сразу следует, что вектора $e_i(t)$ образуют собственный базис $S^{(t)}$, то есть
$$e_i(t+T) = \lambda_i e_i(t) \ , \ i = 1, \dots, n \tag{4}$$
В качестве базиса $\psi(t)$ возьмем векторы $e^{-\mu_i t}e_i(t)$, где $\mu_i = \frac{1}{t}\ln\lambda_i$. (Периодичность выбранного базиса обеспечивается соотношениями (4)).

Пусть теперь $\xi_u(t) = \sum x_i(t)\psi_i(t)$ Так как, по определению $e_i(t)$ $\xi_u(t) = \sum x_i(0)e_i(t)$ и ψ — базис, то $x_i(t) = e^{\mu_i t}x_i(0)$ или $\underline{x}_i(t) = \mu_i x_i(t)$, что и требовалось доказать.

Замечание. В случае, когда S_+ не является диагонализируемым, доказательство проводится, в сущности, аналогично, только (4) заменяется более сложной разностной системой, отвечающей жорданову базису оператора S_+

Следствие 1. *В случае общего положения существует $N(\gamma)$ решений задачи* (1.2) *таких, что*

1. $u_i(t) = e^{\mu_i t}\psi_i(t)\ ,\ \psi_i(t+T) = \psi_i(t)\ ,\ Re\,\mu_i \geq 0$
2. *Общее решение* (1.2) *представляется в виде*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} C_i u_i(t) + u_-(t)\ ,\ \text{где } C_i \in \mathbb{C}\ ,\ \|u_-(t)\|_1 \leq Ce^{-\alpha t}\|u_-(0)\|$$

Следствие 2. *Рассмотрим семейство динамических систем вида* (1.2), *зависящих от параметра $\beta \in \Lambda$. Тогда, если*

$$M = \sup_{\beta \in \Lambda} N_\beta(\gamma) < \infty$$

то диаграмма устойчивости системы (1.2) *в пространстве Λ совпадает с диаграммой устойчивости некоторого конечномерного автономного семейства*

$$\dot{x} = B(\beta)x\ ,\ x \in \mathbb{C}^M$$

и, таким образом, динамика параметрического возбуждения системы (1.2) *оказывается конечномерной.*

Глава 3. Оценка индекса неустойчивости.

В этой главе, используя разложение (1.6) оператора монодромии S и некоторые свойства его внешних степеней $\Lambda^n S$, будет получена асимптотическая по $\gamma \to 0$ оценка индекса неустойчивости $N(\gamma)$ динамической системы (1.2) при условии степенного роста собственных значений оператора A.

$$C_2 k^{2s} \leq \lambda_k \leq C_1 k^{2s} \tag{1}$$

(Это условие заведомо выполнено в наиболее важном частном случае, когда $A = A^*$ является эллиптическим оператором в ограниченной области в $\mathbb{R}^n$.)

Пусть $L : E \to E$ — ограниченный линейный оператор. Рассмотрим

$$\Lambda^n E = \{\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\ ,\quad \xi_i \in E\}$$

и введем норму в этом пространстве по формуле

$$\|\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\|^2 = \det |(\xi_i, \xi_j)|$$

Нетрудно проверить следующие элементарные свойства этой нормы

1. $\|(\xi_1 + \eta_1) \wedge \cdots \wedge \xi_n\| \le \|\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\| + \|\eta_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\|$
2. $\|(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k) \wedge (\xi_{k+1} \wedge \cdots \wedge \xi_n)\| \le \|\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k\| * \|\xi_{k+1} \wedge \cdots \wedge \xi_n\|$

Для оценки изменения n-мерных объемов под действием оператора L введем следующую величину

$$w_n(L) = \sup\{\|L\xi_1 \wedge \cdots \wedge L\xi_n\| : \|\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n\| = 1\}$$

или, что то же самое

$$w_n(L) = \sup\{\|L\xi_1 \wedge \cdots \wedge L\xi_n\| : (\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}\} \tag{2}$$

(В действительности $w_n(L)$ есть просто норма n-ной внешней степени оператора L в гильбертовом пространстве $\Lambda^n(E)$).

Теорема 1.

1. $w_n(L) = \alpha_1(L) \cdots \alpha_n(L)$ *где*

$$\alpha_k(L) = \inf\{\sup\{(Lx, Lx)^{1/2} \ \|x\| = 1\ ,\ x \in F^\perp\}, F \subset E\ ,\ \dim F = k+1\}$$

2. $w_n(L) = w_n(L^*) = [w_n(LL^*)]^{1/2}$
3. $w_n(L) \le \|L\|^n$
4. $w_n(L_1 L_2) \le w_n(L_1) w_n(L_2)$

Относительно доказательства этой теоремы см. [8].

Теорема 2. *Пусть L_1 и L_2 — ограниченные операторы в E, тогда*

$$w_n(L_1 + L_2) \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_k(L_1) w_{n-k}(L_2) \tag{3}$$

Доказательство. Проведем его для $n = 2$. Для остальных n оно проводится аналогично. Используя свойства 1 и 2 нормы, получим

$$\|(L_1 + L_2)\xi_1 \wedge (L_1 + L_2)\xi_2\| \le$$
$$\le \|L_1\xi_1 \wedge (L_1 + L_2)\xi_2\| + \|L_2\xi_1 \wedge (L_1 + L_2)\xi_2\| \le$$
$$\le \|L_1\xi_1 \wedge L_1\xi_2\| + \|L_1\xi_1\| * \|L_2\xi_2\| + \|L_1\xi_2\| * \|L_2\xi_1\| + \|L_2\xi_1 \wedge L_2\xi_2\|$$

Откуда и следует утверждение теоремы.

В дальнейшем нам понадобятся еще два свойства $w_n(L)$.

Лемма 1. *1. Пусть B — положительно определенный самосопряженный компактный оператор, пусть λ_k — его собственные значения, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, обозначим $\varphi(n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, и пусть выполнено неравенство*

$$(LL^*x, x) \leq (B^2x, x)\ , \text{ для всех } x \in E$$

тогда

$$w_n(L) \leq \varphi(n) \tag{4}$$

2. Пусть $E = \mathbb{C}^n$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения L (с учетом кратности), тогда

$$w_n(L) \geq |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| \tag{5}$$

Доказательство. 1. Из принципа min-max получаем: $w_n(L) \leq w_n(B)$, но для компактного самосопряженного оператора $\alpha_k(B) = \lambda_k$, откуда и следует неравенство (4).

2. Без ограничения общности можно считать, что оператор L диагонализируем, так как множество таких операторов плотно в множестве всех операторов, а норма $w_n(L)$ непрерывна по L. Но для диагонализируемого оператора (5) очевидно (достаточно воспользоваться определением (2), взяв в качестве ξ_i собственные векторы оператора L).

Из леммы 1 следует достаточное условие того, что $N(\gamma) < n$.

Теорема 3. *Пусть S — оператор монодромии задачи* (1.2), *тогда если*

$$w_n(S) < 1\ , \quad \text{то } N(\gamma) < n$$

Доказательство. Пусть $N(\gamma) \geq n$, тогда $w_n(S) \geq w_n(S|_{E_+}) \geq 1$, согласно лемме 1. Противоречие. Теорема доказана.

Оценим теперь w_n для операторов $S_0 = \mathcal{U}(T)$ и $D = \mathcal{D}(T)$ основного разложения (1.6).

Лемма 2.

$$w_k(S_0) \leq (1 + C\gamma)^k e^{-\gamma kT/4} \tag{6}$$

$$w_k(D) \leq C^k e^{\alpha kT} M^k w_k(A^{-1/2}) \tag{7}$$

Доказательство. Формула (6) сразу следует из оценки (1.20) и пункта 3 теоремы 1. Для доказательства (7) воспользуемся леммой 1. Оператор D^* действует из E_1^* в E^*, то есть из E_{-1} в E. Поэтому

$$\|DD^*\xi\|_1^2 \leq C^4 M^4 e^{4\alpha T} \|\xi\|_{-1}^2\ , \text{ то есть}$$

$$(A^{1/2}DD^*\xi, A^{1/2}DD^*\xi) \le (C^2M^2e^{2\alpha T}A^{-1/2}\xi, C^2M^2e^{2\alpha T}A^{-1/2}\xi)$$

откуда, согласно лемме 1

$$w_k(A^{1/2}DD^*) \le C^{2k}M^{2k}e^{2\alpha kT}w_k(A^{-1/2})$$

Осталось применить пункт 4 теоремы 1.

$$w_k(DD^*) = w_k(A^{-1/2}A^{1/2}DD^*) \le C^{2k}M^{2k}e^{2k\alpha T}[w_k(A^{-1/2})]^2$$

Откуда и следует неравенство (7). Лемма 2 доказана. (Напомним, что в формулах (6) и (7) константы α и C не зависят от γ, а вся зависимость от γ сосредоточена в константе $M(\gamma)$).

Теперь мы готовы сформулировать основной результат этой главы.

Теорема 4. *При выполнении условия* (1) *индекс неустойчивости динамической системы* (1.2) *допускает следующую асимптотическую по* $\gamma \to 0$ *оценку*

$$N(\gamma) \le CM^{1/s}(\gamma)/\gamma^{1+1/s} \tag{8}$$

где s *определяется формулой* (1), *а* $M(\gamma)$ *определено в теореме 1.2.*

Доказательство. Заметим, что непосредственно из условия (1) следует, что $w_k(A^{-1/2}) \sim C^k(k!)^s$, поэтому, согласно теореме 2 и неравенствам (6) и (7), справедлива следующая оценка

$$w_n(S) \le \sum_{k=0}^{n}(1+C\gamma)^k e^{-\gamma Tk/4}C_1^{n-k}M^{n-k}\frac{n!}{k!\,[(n-k)!]^{1+s}} \tag{9}$$

Воспользуемся очевидным неравенством $\sum_{k=1}^n a_k \le n * \max a_k$, тогда $w_n(S) \le n * \max f_n(k)$, где

$$f_n(k) = \frac{n!}{k!\,[(n-k)!]^{1+s}}\ \exp[-Ck(\gamma T - \ln(1-\gamma)) + \\ + (\ln M + C_1 + \alpha T)(n-k)] \tag{10}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\gamma T - \ln(1+C\gamma) \sim \gamma(T - C) = \gamma T' > 0$ (При случае переходя от T к lT, $l \in \mathbb{Z}$.) Поэтому, расписав в формуле (10) факториалы по формуле Стирлинга, получим

$$\ln f_n(k) \sim \varphi_n(k) \ = \\ = \ -T'\gamma k + (C_1 + \alpha T + \ln M)(n-k) + n\ln\frac{n}{e} - k\ln\frac{k}{e} - \\ - \ (1+s)(n-k)\ln\frac{n-k}{e}$$

Для оценки $\max \varphi_n(k)$, $k = 0, \ldots, n$ рассмотрим более общую функцию $\varphi_n(x)$, где $x \in [0, n]$ и вычислим ее производную по x.

$$\varphi'_n(x) = -l + \ln \frac{(n-x)^{1+s}}{x}, \text{ где } l = T'\gamma + C_1 + \alpha T + \ln M$$

Нетрудно убедиться, что на отрезке $[0, n]$ $\varphi''_n(x) < 0$, поэтому максимум $\varphi_n(x)$ находится из условия $\varphi'_n(x) = 0$,то есть

$$\frac{(n-x)^{1+s}}{x} = e^l = L \tag{11}$$

Обозначим через $\psi(n) = \dfrac{n - x(n)}{n}$, где $x(n)$ — решение (11), тогда соотношение (11) примет вид

$$\frac{\psi^{1+s}}{1-\psi} = Ln^{-s} \tag{12}$$

Преобразуем выражение для $\varphi_n(x(n))$ пользуясь соотношением (12)

$$\begin{aligned} &n \ln \frac{n}{e} - x \ln \frac{x}{e} - (1+s)(n-x) \ln \frac{n-x}{e} = \\ &= n \ln \frac{n}{n-x} + x \ln \frac{(n-x)^{1+s}}{x} - sx - sn \ln \frac{n-x}{e} = \\ &= -n\psi + lx - sn \ln n\psi + s(n-k) \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \varphi_n(x(n)) &= -lx + (l - T'\gamma)n - n \ln \psi + lx - sn \ln n\psi + sn\psi = \\ &= (l - T'\gamma + s)n\psi - n \ln n^s \psi^{1+s} = n[-T'\gamma + s\psi - \ln(1-\psi)] \end{aligned}$$

Итак, доказано следующее утверждение

Лемма 3.

$$w_n(S) \leq \exp\left(n\left[-T'\gamma + s\psi - \ln(1-\psi) + \frac{\ln n}{n}\right]\right) \tag{13}$$

где n и ψ связаны соотношением (12).

Теперь уже несложно завершить доказательство теоремы. Заметим, что формула (12) задает взаимнооднозначное соответствие между ψ из отрезка $[0, 1]$ и $n \in [0, \infty)$. Поэтому определена функция

$$f(\psi) = -T'\gamma + s\psi - \ln(1-\psi) + \frac{\ln n(\psi)}{n(\psi)} \tag{14}$$

Исследуем поведение этой функции в окрестности нуля. Из (12) нетрудно получить, что $[n(\psi)]^{-1} \sim \overline{\overline{o}}(\psi)$, $\psi \to 0$, поэтому f дифференцируема в нуле и $f'(0) = s+1$. Следовательно $f(\psi) \sim -T'\gamma + (s+1)\psi$, а значит условие $f(\psi) < 0$ выполняется при $\psi \sim -T'\gamma/s+1 + \overline{\overline{o}}(\gamma)$. Подставив эту асимптотику в (12) и, вспомнив, что $l = C + \ln M$, а следовательно $e^l = CM(\gamma)$, получим, что $w_n(S) < 1$ при

$$n \sim M^{1/s}(\gamma)/\gamma^{1+1/s}$$

Что вместе с теоремой 3 и доказывает теорему 4.

Пример. Предположим, что выполнены условия (1.11) главы 1, тогда, согласно формуле (1.13)

$$N(\gamma) \leq C\gamma^{-p} \text{ , где } p = 1 + 1/s + 2/s\theta \tag{15}$$

Примечание. Альтернативный метод оценки $N(\gamma)$ будет изложен в главе 4 для регулярного случая.

Глава 4. Еще одна схема оценки индекса неустойчивости.

Эта глава посвящена уточнению оценки индекса неустойчивости системы (1.2) в случае, когда оператор $f(t)$ является более гладким. Причем, при некоторых дополнительных условиях на спектр оператора A, полученная оценка окажется неулучшаемой. Кроме этого, будет построена динамическая система вида (1.2) с бесконечным индексом неустойчивости. (Естественно, условия $(*)$ для этого примера будут нарушены).

Для простоты ограничимся следующими условиями гладкости оператора f

$$\begin{cases} 1.\ f \in C[\mathbb{R}, L(H,H) \cup L(H_1, H_1)] \\ 2.\ f'_t \in C[\mathbb{R}, L(H, H_{-\beta})] \text{ для некоторого } \beta > 0 \end{cases} \tag{$**$}$$

Замечание. В отличие от условий $(*)$ главы 1 здесь не требуется ни самосопряженность $f(t)$, ни A-подчиненность f'_t, что компенсируется более жесткими условиями на $f(t)$.

Для доказательства конечности $N(\gamma)$ построим аналог разложения (1.6). Возьмем в качестве $\mathcal{U}_0(t)$ разрешающий оператор следующей задачи

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + \gamma \partial_t v + Av = 0 \\ v|_{t=0} = u|_{t=0} \text{ , } \partial_t v|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} \end{cases} \tag{1}$$

а $\mathcal{D}(t)$ определим из формулы $\mathcal{D}(t)\,\xi_u(0) = \xi_w(t)$

$$\begin{cases} \partial_t^2 w + \gamma \partial_t w + Aw = -f(t)u \\ w|_{t=0} = 0\,,\ \partial_t w|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Тогда, так же как и в главе 1, разрешающий оператор (1.2) представляется в виде

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{D}(t) \tag{3}$$

и справедлив следующий фундаментальный результат

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{D}(t)$ компактен.*

Доказательство теоремы проводится аналогично [2, стр.132]

Следствие 1. *Все результаты главы 2 остаются справедливыми при замене условий $(*)$ на условия $(**)$, в частности, индекс неустойчивости $N(\gamma) < \infty$.*

Для оценки $N(\gamma)$ нам понадобится следующее понятие

Определение 1. *Пусть $\mathcal{A} \in L(E, E)$, тогда n-мерным следом $\mathcal{A}$ называется следующая величина*

$$\operatorname{Tr}_n \mathcal{A} = \inf\{\operatorname{Tr} \mathcal{A}Q\,,\ Q^2 = Q = Q^*\,,\ \operatorname{rang} Q = n\}$$

А также следующая лемма

Лемма 1.

1. *Пусть $(\mathcal{A}\xi, \xi) \le (B\xi, \xi)\,, \forall \xi \in E$, тогда $\operatorname{Tr}_n \mathcal{A} \le \operatorname{Tr}_n B$.*
2. *Пусть B диагонализируем и самосопряжен, и $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots$ — его собственные числа, тогда*

$$\operatorname{Tr}_n B = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

3. *Пусть $\partial_t \xi_i(t) = \mathcal{A}(t)\xi_i(t)$, тогда*

$$\|\xi_1(t) \wedge \cdots \wedge \xi_n(t)\| \le \|\xi_1(0) \wedge \cdots \wedge \xi_n(0)\| \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Tr}_n \mathcal{A}(t)\, dt\Big)$$

Доказательство этой леммы можно найти в [8].

Теорема 2. *При выполнении условий* $(**)$ *индекс неустойчивости задачи* (1.2) *допускает следующую оценку*

$$N(\gamma) \le \begin{cases} C\gamma^{-1}, & s > 1 \\ C\gamma^{-1}\ln\gamma^{-1}, & s = 1 \\ C\gamma^{-1/s}, & s < 1 \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Представим, следуя [8], уравнение (1.2) в виде системы

$$\begin{cases} \partial_t u = v - \varepsilon u \\ \partial_t v = (\varepsilon - \gamma)v - Au + \varepsilon(\gamma - \varepsilon)u - f(t)u \end{cases} \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, или, обозначив $\{u, v\}$ через ξ

$$\xi = \mathcal{A}(t)\,\xi\ , \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 \\ -A - f + \varepsilon(\gamma - \varepsilon) & \varepsilon - \gamma \end{pmatrix}$$

Обозначим через S оператор монодромии задачи (5), тогда, согласно лемме 1

$$w_n(S) \le \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{Tr}_n\,\mathcal{A}(t)\,dt\Big) \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что

$$(\mathcal{A}\xi, \xi)_E = -\varepsilon\|u\|_1^2 - (\gamma - \varepsilon)\|v\|^2 + \varepsilon(\gamma - \varepsilon)(u, v) - (f(t)u, v) \tag{7}$$

Согласно интерполяционной теореме (см. [12]) оператор $f(t)$ равномерно ограничен как оператор из $H_{1/2}$ в $H_{1/2}$, поэтому

$$|(f(t)u, v)| \le C\|u\|_{1/2}\|v\|_{-1/2} \le C(\|u\|_{1/2}^2 + \|v\|_{-1/2}^2)$$

Подставив эту оценку в формулу (7), и, выбрав $\varepsilon = \gamma/2$, получим при достаточно малом γ

$$(\mathcal{A}\xi, \xi)_E \le (B\xi, \xi)_E\ , \text{ где } B = \begin{pmatrix} -\gamma/4 + CA^{-1/2} & 0 \\ 0 & -\gamma/4 + CA^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Так как оператор B диагонализируем, и его собственные значения μ_n равны $\mu_n = -\gamma/4 + C\lambda_n^{-1/2}$, то, использовав формулу (6), асимптотику (3.1) и пункт 2 леммы 1, получим

$$w_n(S) \le \exp(T\,\mathrm{Tr}_n\,B) \le \exp\Big(C[-n\gamma + \sum_{i=1}^{n} n^{-s}]\Big)$$

Утверждение теоремы следует теперь из теоремы 3.3.

Покажем, что, в некотором смысле, оценка (4) является точной.

Теорема 3. *Существует оператор $f(t)$, удовлетворяющий условиям $(**)$, такой что индекс неустойчивости соответствующей системы имеет асимптотику*

$$N(\gamma) \sim \mathrm{C}\,\gamma^{-1/s} \tag{8}$$

Доказательство. Предположим для простоты, что $\lambda_n = w_n^2 = [n^s]$, где $[\cdot]$ — целая часть. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — собственный базис оператора A, $\mathrm{f}(t)e_n = f_n(t)e_n$, $f_n(t) = \cos 2w_n t$. (Легко проверить справедливость условий $(**)$ для $\mathrm{f}(t)$) При таком выборе f система (1.2) распадается в прямую сумму бесконечного числа одномерных уравнений Матье

$$\ddot{u}_n(t) + \gamma \dot{u}_n(t) + (w_n^2 + \cos 2w_n t)u_n(t) = 0\ ,\ n = 1, 2, \cdots \tag{9}$$

Нам нужно найти число неустойчивых уравнений в семействе (9). Для этого сделаем замену $t' = w_n t$ и обозначим $\varepsilon = 1/w_n$, тогда система (9) примет вид

$$\ddot{u}_n + \varepsilon\gamma \dot{u}_n + (1 + \varepsilon^2 \cos 2t)u_n = 0 \tag{10}$$

Используя метод, изложенный в монографии [13], можно показать,что область неустойчивости (10) имеет вид $\gamma \le \varepsilon/2 + \overline{\overline{o}}(\varepsilon)$. Очевидно, что число решений неравенства

$$\frac{1}{2[n^s]} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^s}\right) \ge \gamma$$

имеет асимптотику

$$N(\gamma) \sim C\gamma^{-1/s}$$

Теорема 3 доказана.

Следствие. *При $s < 1$ оценки (4) и (8) совпадают, следовательно, при $s < 1$ оценка (4) точна в классе условий $(**)$.*

В заключение этой главы приведем пример системы с бесконечным индексом неустойчивости. Для этого в примере из теоремы 3 положим $f_n(t) = w_n \cos 2w_n t$. Тогда $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям

1. $f(t + 2\pi) \equiv f(t)$
2. $\|f(t)u\| \le \|u\|_1$
3. $\|f'(t)u\|_{-1} \le 2\|u\|_1$

Аналогом уравнения (10) для этого случая является

$$\ddot{u}_n + \varepsilon\gamma \dot{u}_n + (1 + \varepsilon \cos 2t)u_n = 0$$

Аналогично доказательству теоремы 3 получаем условие неустойчивости

$$\frac{1}{2} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{n^s}\right) \geq \gamma$$

Откуда и следует, что при $\gamma < 1/2$ индекс $N(\gamma) = \infty$.

Глава 5. Свойства спектра оператора монодромии и представление Флоке

Известно, что в конечномерном случае любая линейная система с периодическими коэффициентами периодической заменой переменной приводится к автономной, то есть ее разрешающий оператор допускает разложение

$$\mathcal{U}(t) = P(t)\exp(-tB)\ ,\ P(t+T) = P(t) \tag{1}$$

Следуя [14], будем называть формулу (1), в которой $P(t), B \in L(E,E)$, представлением Флоке соответствующей динамической системы.

В бесконечномерном случае, как показал Шеффер (см. [14]), такого разложения, вообще говоря, не существует.

В главе 2 было доказано (теорема 2.5), что сужение $\mathcal{U}_+(t) = \mathcal{U}(t)P_+$ разрешающего оператора задачи (1.2) на подпространство резонансных решений E_+ допускает разложение (1), поэтому результаты главы 2 можно считать обобщением представления (1) на бесконечномерный случай.

В данной главе будут сформулированы некоторые условия, обеспечивающие существование у системы

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Au + f(t)u = 0 \\ u|_{t=0} \in H_1\ ,\ \partial_t u|_{t=0} \in H \end{cases} \tag{2}$$

представления Флоке во всем пространстве E. Кроме этого, будет выяснена связь между спектром оператора монодромии задачи (2) и спектром оператора A. Для этого нам понадобится понятие существенного спектра оператора L.

Определение 2. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит существенному спектру $\sigma_{ess}(L)$ оператора L, если выполнено хотя бы одно из следующих условий

1. λ — предельная точка $\sigma(L)$
2. $\dim M_\lambda(L) = \infty$, где $M_\lambda(L) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker(\lambda - L)^k$
3. Область значений $R(\lambda - L)$ не замкнута.

Лемма 1. *Пусть A и B — ограниченные операторы с компактной разностью, такие что*

1. $\operatorname{int} \sigma(A) = \emptyset$
2. *Каждая компонента $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ содержит точку из $\rho(B)$*

Тогда существенные спектры A и B совпадают.

Относительно доказательства этой леммы см. [16].

Теорема 1. *Пусть для любого t операторы A и $f(t)$ перестановочны и $f \subset f^*$, тогда существует ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ в H, в котором уравнение (2) имеет вид*

$$\begin{cases} \ddot{u}_n(t) + \lambda_n u_n(t) + f_n(t) u_n(t) = 0 \\ u_n = (u, e_n)\,,\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим семейство операторов $B(t) = A + f(t)$. Так как A-грань f меньше единицы (согласно условиям $(**)$), то по теореме Като-Реллиха оператор $B(t)$ самосопряжен при любом t, а так как $[B(t_1), B(t_2)] = 0$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, то по спектральной теореме существует общий собственный базис для операторов $B(t)$. Спроектировав (2) на этот базис, получим (3). Теорема 1 доказана

Таким образом, если $[A, f] = 0$ и $f \subset f^*$, то вопрос о представлении Флоке решается тривиально. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $[A, f] \neq 0$. Сформулируем еще одно достаточное условие

Теорема 2. *Рассмотрим задачу (2) с $f \equiv 0$. Пусть $S_0 = S_0(T)$ ее оператор монодромии и пусть его резольвентное множество $\rho(S_0)$ связно, тогда для любого f, удовлетворяющего условиям $(**)$, уравнение (2) обладает представлением Флоке*

Доказательство. Как известно (см. [15]), для существования представления Флоке необходимо и дстаточно, чтобы существовал логарифм из оператора монодромии $S = S_f(T)$. Если в области $\rho(S) \subset \mathbb{C}$ можно соединить 0 и ∞ непрерывным путем, то $\ln S$ можно определить по формуле Коши

$$\ln S = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma} \ln\lambda (S-\lambda I)^{-1}\, d\lambda$$

где Γ — контур, внутренность которого содержит $\sigma(S)$ и не содержит точки 0. Поэтому достаточно доказать связность множества $\rho(S)$. По доказанному в главе 4 оператор $S-S_0$ компактен. Воспользуемся теперь леммой 1. Нетрудно видеть, что при $A=S_0$, $B=S$ все условия леммы выполнены, поэтому $\sigma_{\mathrm{ess}}(S)=\sigma_{\mathrm{ess}}(S_0)$, но

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(S_0)\subset\sigma(S_0)=\{\exp(\pm\lambda_k^{1/2})\}_{k=1}^{\infty}\subset D=\{|z|=1\}$$

где λ_k обозначают, как обычно, собственные значения оператора A. Таким образом, связность $\rho(S_0)$ означает, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(S)\neq D$, а так как по определению σ_{ess} множество $\sigma(S)\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(S)$ состоит из не более чем счетного числа точек, то множество $\rho(S)$ также связно. Теорема 2 доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 следует, что при выполнении условий $(**)$ существенный спектр оператора монодромии задачи (2) совпадает с существенным спектром оператора монодромии невозмущенной задачи (с $f\equiv 0$). В этом заключено принципиальное отличие от случая условий $(*)$, при выполнении которых для любого замкнутого множества K на единичной окружности и любого A можно построить такое f (даже из класса постоянных, коммутирующих с A операторов), что $\sigma_{\mathrm{ess}}(S_f)=K$.

Глава 6. Некоторые приложения

В качестве первого примера рассмотрим линеаризованное уравнение поперереченых колебаний упругого стержня, продольно сжимаемого периодической силой, которое с учетом диссипации энергии имеет вид (см. [1])

$$\rho F\partial_t^2 u+\gamma\partial_t u+E\partial_x^4 u+\partial_x[\phi(x,t)\partial_x u]=0 \tag{1}$$

Уравнение (1) рассматривается на отрезке $[0,L]$ с условиями Дирихле на его концах, функция ϕ удовлетворяет следующим условиям

$$1.\ \phi\in C^2([0,L]\times\mathbb{R})\quad 2.\ \phi(\,\cdot\,,t+T)\equiv\phi(\,\cdot\,,t)$$

В этом примере $H=L_2([0,L])$, $A=\partial_x^4\cdot$, $\mathrm{f(t)}=\partial_x[\phi\partial_x\cdot]$ Нетрудно видеть, что f удовлетворяет условиям (1.11) с $\theta=1$, а оператор A

— условиям (3.1) с $s = 2$, поэтому, согласно формуле (3.15), индекс неустойчивости системы (1) допускает оценку

$$N(\gamma) \le C\gamma^{-2.5}$$

Рассмотрим теперь возмущенное волновое уравнение в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + \Delta u + \phi(t) u = 0$$

Предположим, что ϕ удовлетворяет условиям (∗∗) (например $\phi = \phi(x,t)$ принадлежит $C^1(\Omega \times \mathbb{R})$), тогда при $n > 1$ по формуле (4.4), используя асимптотику собственных значений оператора Лапласа, получим

$$N(\gamma) \le C\gamma^{-n}$$

Причем, согласно теореме 4.3, существует ϕ, для которой эта оценка достигается. В случае же, когда $n = 1$, получается следующая оценка

$$N(\gamma) \le C\frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}$$

Этот результат может быть применен и к нелинейному уравнению типа ‘sine-gordon’

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + \Delta u + \beta \sin u = 0$$

В работе [8] доказано существование аттрактора этого уравнения и, на основе оценки коэффициента изменения n-мерных объемов разрешающего оператора линеаризованной системы, получена асимптотическая оценка его хаусдорфовой размерности

$$\dim_H \mathcal{A} \le C\gamma^{-2}$$

Используя более точную оценку (4.4), получим, что

$$\dim_H \mathcal{A} \le C\frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}$$

Литература.

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: ГИТТЛ, 1956.

2. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989.

3. Фомин В.Н. Параметрический резонанс упругих систем с бесконечным числом степеней свободы I, Вестник ЛГУ, 1965, N13, вып.3, с.73–87.

4. Фомин В.Н. Параметрический резонанс упругих систем с бесконечным числом степеней свободы II, Вестник ЛГУ, 1965, N19, вып.4, с.74–86.

5. Дергузов В.И. Об устойчивости решений гамильтоновых уравнений в гильбертовом пространстве с неограниченными периодическими коэффициентами, ДАН СССР, 152, N6, 1963.

6. Фомин В.Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.

7. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности, УМН, 1983, т.38, N3, с.133–137.

8. Ghidalgia J.M., Temam R. Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations, J. math. pures et appl., 1987.

9. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.

10. Данфорд Н.,Шварц Дж. т.1 Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

11. Клемент Ф., Хейманс Х. и др. Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992.

12. Лионс Ж.Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения.—М.: Наука, 1965.

13. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987.

14. Schaffer J.J. On Floquet's Theorem in Hilbert spaces, Bull. Am. Math. Soc., 70 (1964), 243-245.

15. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970.

16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.4. Анализ операторов. — М.: Мир, 1982.