УДК 517.956.8

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ И АТТРАКТОРЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В $\mathbb{R}^n$.

С. В. Зелик

Laboratoire d'Applications des Mathématiques - SP2MI
Boulevard Marie et Pierre Curie - Téléport 2
86962 Chasseneuil Futuroscope Cedex - France

В работе изучается пространственно-временная динамика, порождаемая системой уравнений реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$ на ее глобальном аттракторе. Для описания этой динамики вводится расширенная $(n+1)$-параметрическая полугруппа, порождаемая разрешающим оператором данной системы и n-параметрической группой пространственных сдвигов, и исследуются ее динамические свойства. В частности, построен ряд новых динамических характеристик действия этой полугруппы на аттракторе, обобщающих понятия фрактальной размерности и топологической энтропии, и исследованы соотношения между ними. Кроме того, при выполнении некоторых естественных условий, получено описание этой динамики в терминах гомеоморфных вложений многомерных схем Бернулли с бесконечным числом символов.

Содержание.

Введение.
- §1. Аналитические свойства решений уравнений реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$.
- §2. Глобальный аттрактор нелинейного уравнения реакции-диффузии и его ε-энтропия.
- §3. Пространственно-временная топологическая энтропия аттрактора.
- §4. Обобщенные топологические энтропии по направлениям.
- §5. Инъективность разрешающего оператора и эволюция пространственно-хаотических структур во времени.
- §6. Сильно-неустойчивые многообразия негиперболических положений равновесия.
- §7. Сильно-неустойчивые многообразия уравнений реакции-диффузии и оценки снизу ε-энтропии аттрактора.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B40, 37B40, 37L05.

Key words and phrases. уравнения реакции-диффузии, многопараметрические полугруппы, топологическая энтропия, пространственно-временной хаос.

§8. Формула Котельникова и пространственный хаос в уравнениях реакции-диффузии.
§9. Построение вспомогательной пространственной динамической системы.
§10. Пространственно - временной хаос в уравнениях реакции - диффузии в $\mathbb{R}^n$.
§11. Формально-градиентные системы уравнений реакции-диффузии и их топологическая энтропия.

Введение.

В работе изучается пространственно-временная динамика, порождаемая следующей квазилинейной системой уравнений реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u = a\Delta_x u - (\vec{L}, \nabla_x)u - \lambda_0 u - f(u), \quad u\big|_{t=0} = u_0, \quad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{0.1}$$

Здесь $u = (u_1(t,x), \cdots, u_k(t,x))$ – неизвестная векторная функция, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^n$, $f(u) = (f_1(u_1, \cdots, u_k), \cdots, f_k(u_1, \cdots, u_k))$ – заданная нелинейная функция взаимодействия, $a > 0$ и $\lambda_0 > 0$ – заданные положительные числа, а $(\vec{L}, \nabla_x)u$ – транспортный член, имеющий следующий вид:

$$(\vec{L}, \nabla_x)u := \sum_{i=1}^{n} L_i \partial_{x_i} u, \tag{0.2}$$

где $\vec{L} := (L_1, \cdots, L_n)$ – заданный вектор. Предполагается также, что нелинейность $f(u)$ удовлетворяет следующим стандартным условиям, гарантирующим диссипативность динамической системы, порождаемой задачей (0.1):

$$\begin{cases} 1. \ \ f \in C^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k), \\ 2. \ \ f(v).v \ge -C, \\ 3. \ \ f'(v) \ge -K, \ \forall v \in \mathbb{R}^k, \end{cases} \tag{0.3}$$

где $C > 0$ и $K > 0$ – некоторые фиксированные константы (здесь и далее, символ $u.v$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$, а условие $f'(v) \ge -K$ означает, что $f'(v)\theta.\theta \ge -K|\theta|^2$ для любого $\theta \in \mathbb{R}^k$).

Центральную роль при изучении динамических свойств диссипативных систем, порождаемых эволюционными уравнениями математической физики, играет понятие глобального аттрактора (см. [1], [18], [28], [39] и цитированную там литературу). Действительно, в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, большинство таких уравнений обладает глобальным аттрактором, хаусдорфова и фрактальная размерность которого конечна. Таким образом, понятие глобального аттрактора позволяет свести исследование исходной динамической системы в *бесконечномерном* фазовом пространстве (например, $\Phi = L^2(\Omega)$) к исследованию редуцированной системы на аттракторе $\mathcal{A}$, которая является (в некотором смысле) конечномерной. Поэтому, несмотря на бесконечномерность исходного фазового пространства, динамические свойства таких диссипативных систем оказываются близкими к свойствам динамических систем, порождаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и могут исследоваться при помощи стандартных идей и методов классической (конечномерной) теории динамических систем, см. [26], [36], [39] и цитируемую там литературу.

Ситуация принципиально меняется при переходе к изучению диссипативных систем, порождаемых уравнениями математической физики в неограниченных областях. В этом случае, как известно (см., например, [3], [14], [23-24]), аттрактор $\mathcal{A}$ обычно имеет бесконечную фрактальную размерность (см. также [10], [14], [23] по поводу некоторых частных случаев диссипативных систем в неограниченных областях, где все-же имеется конечномерность аттрактора). Таким образом, в отличие от случая ограниченной области Ω, динамика, порождаемая диссипативными системами в неограниченных областях, является существенно бесконечномерной и (следовательно) классические 'конечномерные' методы оказываются неэффективными для ее исследования. Более того, наличие 'неограниченных' пространственных направлений приводит к возникновению очень сложной пространственной структуры решений и появлению так называемого пространственного хаоса (см. [11-12] и [43]), а также, к возникновению картины пространственно-временного хаоса в результате взаимодействия пространственных и временных мод (см., например, [16] и [35] по поводу исследования пространственно-временного хаоса в модельных дискретных динамических системах на решетках).

В настоящей работе мы приводим систематическое исследование бесконечномерной динамики, возникающей на аттракторах диссипативных систем в неограниченных областях, на модельном примере системы уравнений вида (0.1). Наш метод исследования основан на следующем простом наблюдении: так как уравнение (0.1) является пространственно-однородным, то его аттрактор $\mathcal{A}$ инвариантен относительно группы $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ пространственных сдвигов:

$$T_h : \to\mathcal{A}, \quad T_h\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad (T_h u_0)(x) := u_0(x+h), \quad h \in \mathbb{R}^n. \tag{0.4}$$

Более того, эта группа коммутирует с эволюционной полугруппой $\{S_t,\, t \geq 0\}$, порождаемой уравнением (0.1) на аттракторе. Таким образом, расширенная $(n+1)$-параметрическая полугруппа

$$\mathbb{S}_{(t,h)} := S_t \circ T_h, \quad \mathbb{S}_{(t,h)} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad t \geq 0, \ h \in \mathbb{R}^n, \tag{0.5}$$

действует на аттракторе $\mathcal{A}$ уравнения (0.1). Мы будем интерпретировать многопараметрическую полугруппу (0.5) как динамическую систему с многомерным временем, действующую на аттракторе $\mathcal{A}$, и будем описывать пространственно-временную динамику, порождаемую уравнением (0.1), в терминах динамических характеристик этой системы. В частности, мы покажем, что, несмотря на кажущееся принципиальное различие между пространственными ($h \in \mathbb{R}^n$) и временными ($t \in \mathbb{R}_+$) направлениями в динамической системе (0.5), эти направления являются, в некотором смысле, равнозначными и могут изучаться в рамках единой теории.

Работа построена следующим образом. В первом параграфе мы напоминаем стандартные аналитические свойства решений уравнения (0.1), (различные априорные оценки, глобальное существование решений, их единственность, гладкость и т.д.).

Во втором параграфе мы показываем, что полугруппа $\{S_t, t \geq 0\}$, порожденная уравнением (0.1), обладает глобальным локально компактным аттрактором $\mathcal{A}$ в фазовом пространстве $\Phi_b := L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (который ограничен в Φ_b и компактен в $\Phi_{loc} := L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$). Кроме того, здесь приводится ряд оценок сверху для колмогоровской энтропии этого аттрактора, которые имеют фундаментальное значение для дальнейшего.

Третий параграф посвящен изучению топологической энтропии $h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)})$ действия многопараметрической полугруппы (0.5) на аттракторе $\mathcal{A}$. В частности, здесь получено несколько эквивалентных формул для ее вычисления, с помощью которых доказана конечность этой величины:

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) \leq C < \infty. \tag{0.6}$$

Этот результат является естественным обобщением на случай неограниченной области классического результата о конечности топологической энтропии действия эволюционной полугруппы S_t на аттракторе $\mathcal{A}$ уравнения (0.1) в *ограниченной* области Ω. Примеры, уравнений вида (0.1), для которых эта величина является строго положительной, были недавно построены в работе [33].

В четвертом параграфе мы исследуем действие подполугрупп $\mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)}$ расширенной полугруппы (0.5), соответствующих различным k-мерным гиперплоскостям V_k в пространстве-времени $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, на аттракторе $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)} := \{\mathbb{S}_{(t,h)}, \, t \geq 0, \, (t,h) \in V_k\}, \quad \mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)}\mathcal{A} = \mathcal{A}. \tag{0.7}$$

Например, выбор одномерной гиперплоскости $V_1 = \mathbb{R}_t$ соответствует чисто временной динамике $\{S_t, t \geq 0\}$, $V_n = \mathbb{R}^n_x$ – чисто пространственной 'динамике' $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$, а промежуточный выбор гиперплоскости V_k описывает взаимодействие пространственных и временных мод исследуемой системы (порожденное, например бегущими волнами). Заметим, что, в отличие полугруппы (0.6), действия полугрупп (0.7), как правило, имеют бесконечную топологическую энтропию: $h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)}) = \infty$, если $k < n+1$ (см. §8 и §10). Поэтому, мы вводим понятие обобщенной топологической энтропии $\widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)})$ действия k-параметрических полугрупп вида (0.7) на аттракторе $\mathcal{A}$ и доказываем их конечность

$$\widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)}) \leq C < \infty. \tag{0.8}$$

Кроме того, здесь получены некоторые соотношения между энтропиями, соответствующими различным гиперплоскостям V_k, которые являются естественным обобщением на многомерный случай классического неравенства между топологической энтропией и фрактальной размерностью.

В пятом параграфе мы доказываем обратимость эволюционного оператора S_t на аттракторе $\mathcal{A}$ и проверяем гельдеровость (с показателем α, сколь угодно близким к единице) обратного оператора S_{-t}. Этот результат используется в дальнейшем для доказательства сохранения количественных характеристик сложности пространственной структуры начального условия $u_0 \in \mathcal{A}$ при эволюции во времени.

В шестом параграфе мы формулируем и доказываем абстрактную теорему о сильно-неустойчивом многообразии гладкого отображения в окрестности негиперболического положения равновесия, которая имеет фундаментальное значение для получения оценок снизу обобщенных энтропий $\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k})$ и описания пространственно-временной динамики (0.5) при помощи схем Бернулли.

В седьмом параграфе мы применяем абстрактную теорему шестого параграфа для построения сильно-неустойчивого многообразия пространственно-однородного положения равновесия уравнения (0.1). При помощи этого многообразия, мы доказываем существование гомеоморфного вложения $\widetilde{\mathbb{V}}$ единичного шара $\mathcal{B}(\sigma)$ классического пространства $\mathbb{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ (которое состоит из функций $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, носитель преобразования Фурье которых лежит в кубе $[-\sigma,\sigma]^n$) в аттрактор $\mathcal{A}$, коммутирующее с группой пространственных сдвигов:

$$\widetilde{\mathbb{V}} : (\mathcal{B}(\sigma), T_h) \to (\mathcal{A}, T_h). \tag{0.9}$$

Таким образом, группа пространственных сдвигов, действующая на шаре $\mathcal{B}(\sigma)$, может интерпретироваться как универсальная модельная динамическая система для описания пространственной динамики $(\mathcal{A}, T_h)$. В частности, из вложения (0.9) следует строгая положительность обобщенной энтропии $\widehat{h}_{top}^1(\mathcal{A}, T_h)$, соответствующей пространственной гиперплоскости $V_n = \mathbb{R}^n_x$.

В восьмом параграфе, используя некоторое обобщение классической формулы Котельникова-Картрайт для функций из $\mathbb{B}_\sigma$, построено гомеоморфное вложение многомерной схемы Бернулли $\mathcal{M}_n := [-1,1]^{\mathbb{Z}^n}$ с бесконечным числом символов $\omega \in [-1,1]$ в модельную динамическую систему $(\mathcal{B}(\sigma), T_h)$, а значит, благодаря вложению (0.9), и в пространственную динамику $(\mathcal{A}, T_h)$ на аттракторе.

Основной целью девятого и десятого параграфов является получение аналогичных результатов для гиперплоскостей V_n, содержащих временные направления, например, $V_n = \operatorname{span}\{e_t, e_{x_2}, \cdots, e_{x_n}\}$. Для этого предполагается, что вектор $\vec{L}$ имеет вид Le_{x_1} и рассматривается следующая вспомогательная параболическая краевая задача в области $\Omega_{x_1} := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_1 > 0\}$:

$$\partial_t u = a\Delta_x u - L\partial_{x_1} u - \lambda_0 u - f(u), \quad u\big|_{x_1=0} = u^0, \tag{0.10}$$

в которой переменная x_1 трактуется как 'время', а переменные $(t, x_2, \cdots, x_n)$ – как пространственные переменные.

В частности, в параграфе 9 доказано, что задача (0.10) действительно определяет диссипативную динамическую систему $\mathcal{S}_{x_1}$ в фазовом пространстве $\Psi_b := L^\infty(\mathbb{R}^n)$, если $L > 0$ достаточно велико. Так как аттракторы уравнений (0.1) и (0.10) в некотором смысле совпадают (см. §9), то описание 'пространственной' динамики, порожденной системой (0.10), дает описание пространственно-временной динамики, соответствующей гиперплоскости V_n, порожденной исходным уравнением (0.1). Таким образом, построив (в параграфе 10), аналогично §7, сильно-неустойчивое многообразие для задачи (0.10), мы получим гомеоморфное вложение

$$\tau : (\mathcal{B}(\sigma), T_h) \to (\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_n}_{(t,h)}), \quad V_n = \operatorname{span}\{e_t, e_{x_2}, \cdots, e_{x_n}\}. \tag{0.11}$$

Более того, из вложения (0.11) и результатов §8 следует описание пространственно-временной динамики, соответствующей гиперплоскости V_n при помощи вложения схемы Бернулли $\mathcal{M}_n := [-1,1]^{\mathbb{Z}^n}$. В частности, отсюда следует строгая положительность обобщенной энтропии $\widehat{h}^n_{top}(\mathcal{A}, S_t)$, соответствующей временной 'гиперплоскости' $V_1 = \mathbb{R}_t$:

$$\widehat{h}^n_{top}(\mathcal{A}, S_t) \ge C > 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad h_{top}(\mathcal{A}, S_t) = \infty. \tag{0.12}$$

И, наконец, в параграфе 11 мы доказываем, что, в случае градиентной нелинейности $f(u) = \nabla_u F(u)$, топологическая энтропия многопараметрической полугруппы (0.5) равна нулю:

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = 0. \tag{0.13}$$

Этот факт является естественным обобщением классического результата о равенстве нулю топологической энтропии градиентных систем обыкновенных уравнений (см., например, [6]).

В заключение стоит отметить, что основные результаты работы, по-видимому, верны для существенно более широкого (чем (0.1)) класса диссипативных уравнений. Например, большинство сформулированных выше результатов остаются справедливыми и в общем случае нескалярной матрицы диффузии a, см. [43–44]. Более того, их частичные аналоги получены в [4], [21] и [42] для диссипативных волновых уравнений и в [8] для эллиптических уравнений в цилиндрических областях.

Данная работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS no. 00-899 и гранта CRDF no. 2343.

§1 Аналитические свойства решений уравнений реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$.

В этом параграфе мы покажем, что задача (0.1) порождает диссипативную полугруппу в фазовом пространстве $\Phi_b := L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и исследуем ее аналитические свойства. Так как результаты этого типа являются более или менее стандартными (см., например, [5] или [23]), мы приведем ниже лишь схематические их доказательства, оставляя детали читателю. Мы начнем со следующей теоремы, которая дает диссипативную оценку для решений задачи (0.1).

Теорема 1.1. *Пусть уравнение* (0.1) *удовлетворяет условиям, сформулированным во введении. Тогда, для любого* $u_0 \in \Phi_b$, *существует единственное решение* $u(t)$, $t \ge 0$, *задачи* (0.1), *которое удовлетворяет следующей оценке:*

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} e^{-\alpha t} + 1\right), \tag{1.1}$$

где C и α – некоторые положительные константы.

Доказательство. Вывод оценки (1.1) основан на принципе максимума для решений параболических уравнений в $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть $w(t) = w(t,x) := |u(t)|^2$. Тогда, согласно условию (0.3)(2), эта функция удовлетворяет следующему неравенству:

$$\begin{aligned}(1.2)\quad \partial_t w - a\Delta_x w - (\vec{L},\nabla_x)w + \lambda_0 w = -2f(u(t)).u(t)-\\ -2a\nabla_x u(t).\nabla_x u(t) \le 2C,\quad w\big|_{t=0} = |u_0|^2.\end{aligned}$$

Применив классический принцип максимума (см., например, [5]) к неравенству (1.2), получим следующую оценку:

$$|u(t,x)|^2 \le \|u_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} e^{-2\lambda_0 t} + 4C/\lambda_0,$$

которая доказывает диссипативную оценку (1.1). Существование и единственность решения $u(t)$ выводятся стандартным образом из априорной оценки (1.1) (см., например, [5]). Теорема 1.1 доказана.

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда решение $u(t)$, построенное в теореме 1.1, удовлетворяет, при $t \ge 1$ и произвольном $\delta > 0$, следующей оценке:*

$$(1.3)\qquad \|u(t)\|_{C_b^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t u\|_{C_b([t,t+1]\times\mathbb{R}^n)} \le Q_\delta(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)})e^{-\alpha t} + C_\delta,\quad t \ge 1,$$

где α и C_δ – некоторые положительные константы, а $Q_\delta(z)$ – некоторая монотонная функция, зависящая от вида нелинейной функции f и константы δ.

Оценка (1.3) является стандартным следствием оценки (1.1) и классических внутренних оценок для решений квазилинейных параболических уравнений вида (0.1) (см., например, [5]). Заметим лишь, что конкретный вид показателя гладкости $4-\delta$ в (1.3) обусловлен предположением о C^2-гладкости нелинейной функции f ($f \in C^2(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$, см. условие (0.3)).

Из теоремы 1.1 следует, что задача (0.1) определяет полугруппу $\{S_t, \ge 0\}$ в фазовом пространстве Φ_b по следующей стандартной формуле:

$$(1.4)\qquad S_t : \Phi_b \to \Phi_b,\quad S_t u_0 := u(t),$$

где $u(t)$ – решение задачи (0.1) с начальным условием $u(0) = u_0 \in \Phi_b$. Заметим также, что уравнение (0.1) является пространственно-однородным. Следовательно, группа $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ трансляций вдоль пространственных направлений коммутирует с эволюционной полугруппой (1.4):

$$(1.5)\qquad T_h \circ S_t = S_t \circ T_h,\quad t \in \mathbb{R}_+,\quad h \in \mathbb{R}^n,\quad (T_h u_0)(x) := u_0(x+h).$$

Таким образом, уравнение (0.1) порождает действие расширенной $(n+1)$-параметрической полугруппы $\{\mathbb{S}_{(t,h)}, t \in \mathbb{R}_+, h \in \mathbb{R}^n\}$ в фазовом пространстве Φ_b по следующей очевидной формуле:

$$(1.6)\qquad \mathbb{S}_{(t,h)} := S_t \circ T_h,\quad t \in \mathbb{R}_+,\quad h \in \mathbb{R}^n,\quad \mathbb{S}_{(t,h)} : \Phi_b \to \Phi_b.$$

Эта многопараметрическая полугруппа играет ключевую роль в нашем исследовании пространственно-временной структуры решений уравнения (0.1), см. §3–§11.

В качестве следующего шага, мы докажем липшицевость эволюционной полугруппы (1.4) по отношению к начальным условиям $u_0 \in \Phi_b$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда, для любых двух решений $u(t)$ и $u_1(t)$ уравнения (0.1), справедлива следующая оценка:*

$$|u(t,x)-u_1(t,x)| \le Ce^{Kt}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{e^{-\alpha|x-y|}|u(0,y)-u_1(0,y)|\}, \tag{1.7}$$

где константа K такая же, как и в условии (0.3)(3), C – некоторая положительная константа, а $\alpha>0$ – достаточно малое положительное число.

Доказательство. Введем функцию $v(t):=u(t)-u_1(t)$. Эта функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$\partial_t v - a\Delta_x v + (\vec{L},\nabla_x)v + \lambda_0 v = -l(t)v, \quad v\big|_{t=0} = u(0)-u_1(0), \tag{1.8}$$

где $l(t):=\int_0^1 f'(su(t)+(1-s)u_1(t))\,ds$. Согласно условию (0.3)(3), матрица $l(t)=l(t,x)$ удовлетворяет условию $l(t)\ge -K$. Поэтому, функция $w(t)=w(t,x):=|v(t,x)|^2$ удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:

$$\partial_t w - a\Delta_x w + (\vec{L},\nabla_x)w + 2\lambda_0 w - 2Kw \le 0, \quad w\big|_{t=0} = |v(0)|^2.$$

Таким образом, согласно принципу максимума, достаточно доказать оценку вида (1.7) для решений линейного уравнения

$$\partial_t \theta - a\Delta_x \theta - (\vec{L},\nabla_x)\theta + 2\lambda_0\theta - 2K\theta = 0, \quad \theta\big|_{t=0} = |v(0)|^2. \tag{1.9}$$

Для этого мы введем следующую весовую функцию:

$$\phi_{\alpha,x_0}(x) := e^{-\alpha\sqrt{1+|x-x_0|^2}}, \tag{1.10}$$

где α – достаточно малое положительное число, а x_0 – произвольная точка в $\mathbb{R}^n$, и рассмотрим функцию $\theta_{x_0}(t)=\theta_{x_0}(t,x):=\phi_{\alpha,x_0}(x)\theta(t,x)$, которая, очевидно, удовлетворяет уравнению:

$$\partial_t\theta_{x_0} - a\Delta_x\theta_{x_0} + (\vec{L},\nabla_x)\theta_{x_0} + 2(\lambda_0-K)\theta_{x_0} = L_1(x)\theta_{x_0} + L_2(x)\nabla_x\theta_{x_0}, \tag{1.11}$$

где

$$\begin{cases} L_1(x)z := \big[2a(\phi_{\alpha,x_0}^{-1}|\nabla_x\phi_{\alpha,x_0}|)^2 - \phi_{\alpha,x_0}^{-1}(a\Delta_x\phi_{\alpha,x_0} + (\vec{L},\nabla_x)\phi_{\alpha,x_0}\big]z, \\ L_2(x)\nabla_x z := -2a\phi_{\alpha,x_0}^{-1}\nabla_x\phi_{\alpha,x_0}.\nabla_x z. \end{cases} \tag{1.12}$$

Заметим теперь, что весовые функции (1.10) удовлетворяют следующим оценкам:

$$|\nabla_x\phi_{\alpha,x_0}(x)| \le \alpha\phi_{\alpha,x_0}(x), \quad |\Delta_x\phi_{\alpha,x_0}(x)| \le n(\alpha+\alpha^2)\phi_{\alpha,x_0}(x), \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

Поэтому,

$$|L_1(x)z| \le C(\alpha+\alpha^2)|z|, \quad |L_2(x)\nabla_x z| \le C(\alpha+\alpha^2)|\nabla_x z|, \tag{1.14}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от α, x и x_0. Из этих оценок следует, что, при выполнении условия $C(\alpha+\alpha^2)\le 2\lambda_0$, функция $\widehat{\theta}(t):=\|\theta_{\alpha,x_0}(0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}e^{2Kt}$ удовлетворяет неравенству

$$\partial_t\widehat{\theta} - a\Delta_x\widehat{\theta} + (\vec{L},\nabla_x)\widehat{\theta} + (\lambda_0-2K)\widehat{\theta} - L_1(x)\widehat{\theta} - L_2(x)\nabla_x\widehat{\theta} \ge 0, \quad \widehat{\theta}\big|_{t=0} \ge \theta_{x_0}\big|_{t=0}.$$

Таким образом, согласно принципу максимума,

$$|v(t,x_0)|^2 \le \theta(t,x_0) = \theta_{x_0}(t,x_0) \le \widehat{\theta}(t) = e^{2Kt}\|\phi_{\alpha/2,x_0}v(0)\|^2_{L^\infty(R^n)}. \tag{1.15}$$

Так как $x_0\in\mathbb{R}^n$ произвольно, то из (1.15) следует оценка (1.7). Теорема 1.2 доказана.

Следствие 1.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 1.2. Тогда, для любых двух решений $u(t)$ и $u_1(t)$ и любого $t \ge 1$, справедлива следующая оценка:*

$$(1.16)\quad |\nabla_x u(t,x) - \nabla_x u_1(t,x)| \le Ce^{Kt} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{e^{-\alpha|x-y|}|u(0,y) - u_1(0,y)|\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где константа C зависит от $\|u(0)\|_{\Phi_b}$ и $\|u_1(0)\|_{\Phi_b}$, но не зависит от t и x, а $\alpha > 0$ – такое же, как и в теореме 1.2.

Как и оценка (1.3), оценка (1.16) является стандартным следствием оценки (1.7) и классической внутренней оценки, но примененной теперь к линейному уравнению (1.8) (см. [5], [23]).

Нашей следующей целью является проверка дифференцируемости по Фреше полугруппы (1.4) в пространстве Φ_b. Для этого, как обычно, нужно рассмотреть следующее уравнение в вариациях, которое является линеаризацией уравнения (0.1) вдоль некоторого (произвольного) решения $u(t) = S_t u_0$:

$$(1.17)\qquad \partial_t v = a\Delta_x v - (\vec{L}, \nabla_x)v - \lambda_0 v - f'(u(t))v, \quad v\big|_{t=0} = v_0.$$

Предложение 1.1. *Уравнение (1.17) имеет единственное решение $v(t)$, которое удовлетворяет следующей оценке:*

$$(1.18)\qquad |v(t,x)| \le e^{Kt} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{e^{-\alpha|x-y|}|v_0(y)|\right\},$$

в которой константы α и K – такие же, как и в теореме 1.2.

Вывод оценки (1.18) дословно повторяет доказательство теоремы 1.2 и, поэтому, не приводится. Существование решения $v(t)$ является стандартным следствием этой оценки (как и в случае уравнения (0.1), см. [5]).

Теперь мы готовы доказать дифференцируемость полугруппы (1.4).

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть также $u(t)$ и $u_1(t)$ – два произвольных решения задачи (0.1), а $v(t)$ – решение задачи (1.17) с начальным условием $v(0) = u(0) - u_1(0)$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$(1.19)\quad |u(t,x) - u_1(t,x) - v(t,x)| \le \\ \le Ce^{2Kt}\|u_1(0) - u_2(0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{e^{-\alpha|x-y|}|u(0,y) - u_1(0,y)|\right\},$$

где константы K и α такие же, как и в теореме 1.2, а константа C зависит от L^∞-норм начальных условий $u(0)$ и $u_1(0)$, но не зависит от $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Введем функцию $w(t) := u(t) - u_1(t) - v(t)$, которая, очевидно, удовлетворяет следующему уравнению:

$$(1.20)\qquad \partial_t w - a\Delta_x w + (\vec{L}, \nabla_x)w + \lambda_0 w + f'(u(t))w = h_{u,u_1}(t),$$

где $h_{u,u_1}(t) := \int_0^1 [f'(su(t) + (1-s)u_1(t)) - f'(u(t))]\, ds \cdot v(t)$. Так как $f \in C^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, и L^∞-нормы решений $u(t)$ и $u_1(t)$ ограничены, согласно теореме 1.1, то правая часть уравнения (1.20) допускает следующую оценку:

$$(1.21)\qquad |h_{u,u_1}(t,x)| \le C|u(t,x) - u_1(t,x)| \cdot |v(t,x)|,$$

где C зависит от L^∞-нормы начальных условий, но не зависит от t и x. Подставив оценки (1.7) и (1.18) в правую часть оценки (1.21), получим

$$(1.22)\quad |h_{u,u_1}(t,x)| \le C_1 e^{2Kt}\|u(0)-u_1(0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{e^{-\alpha|x-y|}|u(0,y)-u_1(0,y)|\right\}.$$

Оценка (1.19) выводится из (1.20) и (1.22) так же, как и при доказательстве теоремы 1.2. Теорема 1.3 доказана.

Следствие 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда полугруппа* (1.4) *принадлежит классу $C^{1,1}(\Phi_b,\Phi_b)$, и ее производная Фреше $D_{u_0}S_t(u_0)$ вычисляется по формуле: $D_{u_0}S_t(u_0)\xi := v_\xi(t)$, где $\xi\in\Phi_b$ – произвольный вектор, а $v_\xi(t)$ – решение уравнения* (1.17) *с начальным условием $v_\xi(0)=\xi$. Кроме того, справедлива следующая оценка:*

$$(1.23)\qquad \|D_{u_0}S_t(u)-D_{u_0}S_t(u_1)\|_{\mathcal{L}(\Phi_b,\Phi_b)} \le C_2 e^{2Kt}\|u_0-u_1\|_{\Phi_b},\ u_0,u_1\in\Phi_b,$$

где константа C_2 зависит от L^∞-норм векторов u_0 и u_1.

Действительно, как дифференцируемость полугруппы (1.4), так и оценка (1.23) немедленно следуют из оценки (1.19).

В завершение этого параграфа, мы введем некий естественный класс весовых функций в $\mathbb{R}^n$ и соответствующий ему класс весовых пространств, которые будут многократно использоваться в дальнейшем.

Определение 1.1. Назовем функцию $\phi\in C_{loc}(\mathbb{R}^n)$ весовой функцией экспоненциального роста $\mu>0$, если выполнены следующие неравенства:

$$(1.24)\qquad \phi(x)>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n \quad\text{и}\quad \phi(x+y)\le C_\phi e^{\mu|x|}\phi(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n,$$

где $C_\phi>0$ – некоторая константа, не зависящая от x и y. Пусть ϕ – произвольная весовая функция экспоненциального роста. Введем весовое пространство $\Phi_\phi := L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)$ по следующей формуле:

$$(1.25)\qquad L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n) := \left\{u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\phi(x)|u(x)|\}<\infty\right\}.$$

Простейшие свойства введенных выше весовых функций собраны в следующем предложении.

Предложение 1.2. *1. Пусть ϕ – весовая функция экспоненциального роста. Тогда, наряду с* (1.24), *выполнена следующая оценка:*

$$(1.26)\qquad \phi(x+y)\ge C_\phi^{-1}e^{-\mu|x|}\phi(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n.$$

2. Функция $\varphi(x):=e^{-\alpha|x|}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, является весовой функцией экспоненциального роста $|\alpha|$ (с константой $C_\varphi=1$), а функция $\psi_\alpha(x):=(1+|x|)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, – весовой функцией экспоненциального роста μ для любого $\mu>0$.

3. Если ϕ и ϕ_1 – две весовые функции экспоненциального роста, то функции $\phi+\phi_1$, $\phi\cdot\phi_1$ и ϕ^α $(\alpha\in\mathbb{R})$ также являются весовыми функциями экспоненциального роста.

4. Если ϕ – весовая функция экспоненциального роста, то функции $T_h\phi$ $(h\in\mathbb{R}^n)$ и

$$\phi_V(x) := \sup\nolimits_{y\in V}\phi(x+y), \tag{1.27}$$

где V – произвольное ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, являются весовыми функциями экспоненциального роста и удовлетворяют неравенству (1.24) с теми же константами μ и C_ϕ, что и исходная функция ϕ.

5. Для любой функции $u\in L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)$, где ϕ – произвольная весовая функция экспоненциального роста μ, справедливы следующие оценки:

$$\|u\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le \sup\nolimits_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{\phi(y)\sup\nolimits_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{e^{-\mu|x-y|}|u(x)|\right\}\right\} \le C_\phi\|u\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.28}$$

Доказательство. Первые четыре пункта предложения 1.2 очевидны (см., также, [23] и [43]), поэтому остается доказать оценку (1.28). Левая часть неравенства (1.28) тоже очевидна, так как

$$u(y) \le \sup\nolimits_{x\in\mathbb{R}^n}\{e^{-\mu|x-y|}|u(x)|\}.$$

Докажем правую часть неравенства (1.28). Действительно, согласно (1.24), получим

$$\sup\nolimits_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{\phi(y)\sup\nolimits_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{e^{-\mu|x-y|}|u(x)|\right\}\right\} \le \\ \le C_\phi\sup\nolimits_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left\{\phi(x)e^{\mu|x-y|}e^{-\mu|x-y|}|u(x)|\right\} = C_\phi\|u\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)}.$$

Предложение 1.2 доказано.

Следствие 1.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и пусть ϕ – произвольная весовая функция экспоненциального роста α, где константа $\alpha>0$ такая же, как и в теореме 1.2. Тогда, для любых $u_0,u_1\in\Phi_b\cap\Phi_\phi$, справедливы следующие оценки:*

$$\|S_t(u_0)-S_t(u_1)\|_{\Phi_\phi}+\|D_{u_0}S_t(u_0)(u_0-u_1)\|_{\Phi_\phi} \le Ce^{Kt}\|u_0-u_1\|_{\Phi_\phi}, \tag{1.29}$$

$$\|S_t(u_0)-S_t(u_1)-D_{u_0}S_t(u_0)(u_0-u_1)\|_{\Phi_\phi} \le Ce^{2Kt}\|u_0-u_1\|_{\Phi_b}\|u_0-u_1\|_{\Phi_\phi}, \tag{1.30}$$

где константа C зависит только от Φ_b-норм начальных условий u_0 и u_1 и от константы C_ϕ в неравенстве (1.24) (и не зависит от конкретного вида весовой функции ϕ).

Действительно, умножив оценки (1.7) и (1.18) на весовую функцию $\phi(x)$, взяв супремум по $x\in\mathbb{R}^n$, и воспользовавшись правым неравенством (1.28), получим оценку (1.29). Оценка (1.30) выводится аналогичным образом из неравенства (1.19).

§2 Глобальный аттрактор нелинейного уравнения реакции-диффузии и его ε-энтропия

В этом параграфе мы докажем существование (локально-компактного) глобального аттрактора полугруппы (1.4), а также сформулируем ряд оценок сверху для колмогоровской энтропии этого аттрактора, которые будут существенно использованы в дальнейшем.

Напомним, прежде всего, что, в отличие от случая ограниченной области, полугруппа (1.4), порожденная уравнением (0.1) в неограниченной области (например, в $\mathbb{R}^n$), как правило, не имеет классического глобального аттрактора (см. [41], [43]). Поэтому, для описания асимптотического поведения решений эволюционных уравнений в неограниченных областях при $t \to \infty$, обычно используется следующая ослабленная версия понятия глобального аттрактора (см. [23], [25], [32]).

Определение 2.1. Множество $\mathcal{A} \subset \Phi_b$ называется (локально-компактным) глобальным аттрактором полугруппы (1.4), если выполнены следующие условия:

1. Множество $\mathcal{A}$ ограничено в Φ_b и компактно в $\Phi_{loc} := L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
2. Множество $\mathcal{A}$ строго инвариантно: $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$.
3. Множество $\mathcal{A}$ притягивает образы ограниченных в Φ_b подмножеств фазового пространства в более слабой топологии пространства Φ_{loc}, то есть, для любого ограниченного (в Φ_b) подмножества $B \subset \Phi_b$ и любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ в локальной топологии пространства Φ_{loc}, существует $T = T(B, \mathcal{O})$, такое что

$$S_tB \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}) \ \text{ при } \ t \geq T. \tag{2.1}$$

Напомним, что первое условие определения 2.1 означает компактность (в $L^\infty(\Omega)$) сужений $\mathcal{A}\big|_\Omega$ аттрактора $\mathcal{A}$ на любую *ограниченную* область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Более того, пусть ϕ – произвольная весовая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{|x|\to\infty} |\phi(x)| = 0. \tag{2.2}$$

Тогда, так как аттрактор $\mathcal{A}$ предполагается ограниченным (но не компактным!) в Φ_b, то топологии, порождаемые вложениями $\mathcal{A} \subset \Phi_{loc}$ и $\mathcal{A} \subset \Phi_\phi$, совпадают. Поэтому, первое условие определения 2.1 может быть переформулировано следующим образом: множество $\mathcal{A}$ ограничено в Φ_b и компактно в Φ_ϕ (для некоторой весовой функции ϕ, удовлетворяющей условию (2.2)).

Аналогично, третье условие определения 2.1 эквивалентно следующему: для любого ограниченного (в Φ_b) подмножества $B \subset \Phi_b$, любой *ограниченной* области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A}\big|_\Omega)$ (в топологии пространства $L^\infty(\Omega)$) сужения аттрактора на область Ω, существует $T = T(B, \Omega, \mathcal{O})$, такое что

$$(S_tB)\big|_\Omega \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}\big|_\Omega) \quad \text{при} \quad t \geq T. \tag{2.3}$$

(Таким образом, время, необходимое для того, чтобы образ множества B, суженный на ограниченную область Ω, попал в ε-окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})\big|_\Omega$ аттрактора $\mathcal{A}$ (в топологии Φ_b), может расти с увеличением области Ω.)

Следующая теорема доказывает существование у полугруппы (1.4) аттрактора $\mathcal{A}$ (в смысле определения 2.1).

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда полугруппа* (1.4), *порожденная уравнением* (0.1), *обладает (локально-компактным) аттрактором* $\mathcal{A}$, *который ограничен в пространстве* $C_b^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$, *для любого* $\delta > 0$, *строго инвариантен относительно действия расширенной* $(n+1)$*-параметрической полугруппы* (1.6), *то есть*

$$\mathbb{S}_{(t,h)}\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad h \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

и допускает следующее стандартное описание:

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}\big|_{t=0}, \tag{2.5}$$

где $\mathcal{K}$ *– множество всех решений* $u(t)$ *уравнения* (0.1), *определенных при всех* $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и принадлежащих пространству* $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Доказательство. Согласно теореме о существовании аттрактора для абстрактных полугрупп (см., например, [1], [28], [39]), нужно проверить следующие условия:

1. Полугруппа S_t обладает поглощающим множеством $\mathcal{B}$, которое ограничено в Φ_b и компактно в Φ_{loc}.

2. Сужение оператора S_t на это компактное множество непрерывно (по начальным условиям) в топологии пространства Φ_{loc}.

Проверим эти условия. Действительно, согласно оценке (1.1), шар $B := \{u \in \Phi_b, \ \|u\|_{\Phi_b} \le 2C\}$ является поглощающим множеством полугруппы (1.4), которое ограничено в Φ_b и замкнуто (но не компактно) в Φ_{loc}. Заметим, также, что сужение оператора S_t на B непрерывно при любом фиксированном t. Действительно, так как B ограничено в Φ_b, то локальная топология на нем может быть задана при помощи метрики пространства Φ_ϕ, где ϕ - некоторая весовая функция, удовлетворяющая условию (2.2), а непрерывность (и даже липшицевость) S_t в этой метрике немедленно следует из оценки (1.29).

Мы утверждаем, что множество $\mathcal{B} := S_1 B$ является искомым поглощающим множеством. Действительно, согласно следствию 1.1, множество $\mathcal{B}$ ограничено в $C_b^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$, а значит, предкомпактно в Φ_{loc}, его замкнутость в Φ_{loc} следует из непрерывности оператора S_1 на B, доказанной ранее. Итак, первое условие проверено. Второе условие доказывается так же, как и непрерывность S_t на B, так как $\mathcal{B}$ тоже ограничено в Φ_b. Следовательно, согласно абстрактной теореме о существовании аттрактора, упомянутой выше, полугруппа (1.4) обладает аттрактором $\mathcal{A}$, который является подмножеством $\mathcal{B}$ и, следовательно, ограничен в $C_b^{4-\delta}(\mathbb{R}^n)$ и допускает стандартное описание (2.5). Наконец, инвариантность аттрактора относительно расширенной полугруппы (1.5) немедленно следует из пространственной однородности исходного уравнения (0.1). Теорема 2.1 доказана.

Таким образом, уравнение (0.1) обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}$, который компактен в локальной топологии пространства Φ_b, но, как правило, не компактен в топологии пространства Φ_b. Действительно, предположим что аттрактор $\mathcal{A}$ – компакт в Φ_b и пусть u_0 – произвольная точка на нем. Тогда, так как аттрактор $\mathcal{A}$

состоит из непрерывных функций и инвариантен относительно группы T_h пространственных сдвигов, то оболочка

$$H(u_0) := \left[T_h u_0,\ h \in \mathbb{R}^n\right]_{C_b(\mathbb{R}^n)},$$

где через $[X]_V$ обозначено замыкание множества X в пространстве V, является подмножеством аттрактора $\mathcal{A}$ и, следовательно, компактна в пространстве $C_b(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, согласно критерию Бохнера-Америо, функция $u_0(x)$ почти-периодична по x ($u_0 \in AP(\mathbb{R}^n)$). Таким образом, компактность аттрактора $\mathcal{A}$ в равномерной топологии влечет следующее вложение:

$$\mathcal{A} \subset AP(\mathbb{R}^n). \tag{2.6}$$

Так как всякое положение равновесия заведомо принадлежит аттрактору, то из (2.6) следует, в частности, что все ограниченные решения эллиптической задачи

$$a\Delta_x u - (\vec{L}, \nabla_x) u - f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

должны быть почти-периодическими по $x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что последнее условие является крайне ограничительным и, как правило, не выполняется для более или менее разумных примеров уравнений вида (0.1). Например, рассмотрим следующее скалярное уравнение Chafee-Infante в R^n:

$$\partial_t u = \Delta_x u + u - u^3. \tag{2.8}$$

Очевидно, что это уравнение удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1 и, следовательно, существует локально компактный аттрактор $\mathcal{A}$. С другой стороны, функция $u_0(x) = u_0(x_1) := \tanh(x_1/\sqrt{2})$ – положение равновесия этого уравнения, которое не является почти-периодическим. Таким образом, $\mathcal{A}$ не компактен в исходном фазовом пространстве Φ_b.

Следующий пример показывает, что решения уравнения (0.1), вообще говоря, не притягиваются к аттрактору $\mathcal{A}$ в равномерной топологии пространства Φ_b (даже в случае, если аттрактор $\mathcal{A}$ компактен в Φ_b). Действительно, рассмотрим следующее скалярное уравнение:

$$\partial_t u = \Delta_x u - f(u), \quad \text{где} \quad f(u) = \begin{cases} (u+1)^3, & ;\ \text{при}\ \ u < -1, \\ 0, & ;\ \text{при}\ \ u \in [-1,1], \\ (u-1)^3, & ;\ \text{при}\ \ u > 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Очевидно, что уравнение (2.9) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1. Более того, используя пространственно однородные решения этого уравнения в качестве барьерных функций, нетрудно показать, что $\|\mathcal{A}\|_{C_b(\mathbb{R}^n)} \le 1$ и, следовательно, всякое ограниченное решение $u(t,x) \in \mathcal{K}$ уравнения (2.9) является ограниченным решением линейного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, согласно теореме Лиувилля,

$$\mathcal{A} := \{u_0(x) \equiv u_0,\ u_0 \in [-1,1]\}. \tag{2.10}$$

Таким образом, аттрактор $\mathcal{A}$ компактен в равномерной топологии Φ_b. С другой стороны, рассмотрим решение $u(t) := S_t u_0$ уравнения (2.9) с начальным условием $u_0(x) = \mathrm{sgn}(x_1) \in \Phi_b$. Тогда, так как $u_\pm(x) \equiv \pm 1$ являются положениями равновесия рассматриваемой системы, то из оценки (1.7) следует, что

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} u(t,x) = \pm 1, \text{ для любого конечного } t \geq 0$$

и, следовательно, $\mathrm{dist}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}(u(t), \mathcal{A}) = 1$ для любого конечного t.

Примеры уравнений (2.8) и (2.9) показывают необходимость использования ослабленной версии понятия глобального аттрактора (см. определение 2.1) при изучении уравнений вида (0.1) в неограниченных областях. Другим принципиальным отличием теории аттракторов эволюционных уравнений в неограниченных областях от классической теории аттракторов этих уравнений в ограниченных областях (см. [1], [28], [39]) является бесконечномерность аттрактора $\mathcal{A}$ (то есть, как хаусдорфова так и фрактальная размерность сужений аттрактора $\mathcal{A}\big|_\Omega$ на любую ограниченную область, как правило, оказывается бесконечной, см. [3], [14], [23-24]). Поэтому, для получения количественной и качественной информации о таких аттракторах обычно используется понятие Колмогоровской ε-энтропии (см. [3-4], [9], [19-21], [23-24], [41-44]).

Определение 2.2. Пусть K – предкомпактное множество в метрическом пространстве (M, d). Тогда, для любого $\varepsilon > 0$, это множество может быть покрыто конечным числом ε-шаров в M. Пусть $N_\varepsilon(K, M)$ – минимальное число таких шаров. По определению, Колмогоровской ε-энтропией множества K называется следующее число:

$$\mathbb{H}_\varepsilon(K, M) = \mathbb{H}_\varepsilon(K, d) := \ln N_\varepsilon(K, M). \tag{2.11}$$

Напомним также, что фрактальная размерность K выражается через ε-энтропию по следующей формуле:

$$\dim_F(K, M) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(K, M)}{\ln 1/\varepsilon} \tag{2.12}$$

(см., например, [7] или [40]).

Следующая теорема дает типичный вид асимптотики ε-энтропии сужений $\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}$ аттрактора $\mathcal{A}$ на шар $B^R_{x_0}$ радиуса R с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}, L^\infty(B^R_{x_0})\right) \leq C\left(R + \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}\right)^n \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}, \tag{2.13}$$

где $\ln_+ z := \max\{0, \ln z\}$, *а константы* C *и* R_0 *не зависят от* ε, R *и* x_0.

Схема доказательства. Для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $R \in \mathbb{R}_+$, рассмотрим весовую функцию

$$\phi_{R,x_0}(x) := e^{-\alpha\, \mathrm{dist}_{\mathbb{R}^n}(x, B^R_{x_0})}, \tag{2.14}$$

где $\alpha > 0$ – такое же, как и в теореме 1.2. Тогда, согласно предложению 1.2, функции (2.14) являются весовыми функциями экспоненциального роста α (с константой $C_{\phi_{R,x_0}} \equiv 1$, не зависящей от R и x_0). Поэтому, согласно теореме 1.2, следствию 1.2 и оценкам (1.28), справедливо неравенство

$$\|S_1u_1 - S_1u_2\|_{W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}(\mathbb{R}^n)} \le L\|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{\phi_{R,x_0}}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{A}, \tag{2.15}$$

где S_1 разрешающий оператор задачи (0.1) за единичное время, $W^{1,\infty}_\phi(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n) : \nabla_x u \in L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)\}$, а константа L не зависит от $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}_+$ и $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$.

Заметим, что $\phi_{R,x_0}(x) \equiv 1$, если $x \in B^R_{x_0}$. Поэтому,

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}, L^\infty(B^R_{x_0})\right) \le \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, L^\infty_{\phi_{R,x_0}}(\mathbb{R}^n)\right). \tag{2.16}$$

Таким образом, для доказательства оценки (2.13) достаточно оценить ε-энтропию аттрактора в весовом пространстве $L^\infty_{\phi_{R,x_0}}(\mathbb{R}^n)$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. *Справедлива следующая рекуррентная оценка:*

$$\mathbb{H}_{\varepsilon/2}\left(\mathcal{A}, L^\infty_{\phi_{R,x_0}}(\mathbb{R}^n)\right) \le C(R + \ln_+\frac{R_0}{\varepsilon})^n + \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, L^\infty_{\phi_{R,x_0}}(\mathbb{R}^n)\right), \tag{2.17}$$

где константы C и R_0 не зависят от ε, R и x_0.

Доказательство. Действительно, пусть $\{u_1, \cdots, u_k,\ k = 1, \cdots, N(\varepsilon)\}$ – произвольное покрытие аттрактора $\mathcal{A}$ ε-шарами $B(\varepsilon, u_i, L^\infty_{\phi_{R,x_0}})$ пространства $L^\infty_{\phi_{R,x_0}}$ с центрами $u_i \in \mathcal{A}$. Тогда из инвариантности аттрактора $\mathcal{A}$ относительно S_t и оценки (2.15) следует, что система $L\varepsilon$-шаров пространства $W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}$ с центрами в точках S_1u_i, $i = 1, \cdots, N(\varepsilon)$, также покрывает аттрактор $\mathcal{A}$. Покрыв теперь каждое множество $\mathcal{A} \cap B(L\varepsilon, S_1, W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}})$ $\varepsilon/2$-шарами пространства $L^\infty_{\phi_{R,x_0}}$, мы получим новое $\varepsilon/2$-покрытие аттрактора $\mathcal{A}$ с числом шаров

$$N(\varepsilon/2) \le M(\varepsilon)N(\varepsilon), \quad M(\varepsilon) := \max_{i=1,\cdots,N(\varepsilon)} N_{\varepsilon/2}\left(\mathcal{A} \cap B(L\varepsilon, S_1u_i, W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}), L^\infty_{\phi_{R,x_0}}\right) \tag{2.18}$$

(величина $M(\varepsilon)$ конечна, так как $\mathcal{A}$ – компакт в $L^\infty_{\phi_{R,x_0}}$). Для оценки величины $M(\varepsilon)$ заметим, что

$$\|\mathcal{A}\big|_{\mathbb{R}^n \setminus B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0}}\|_{L^\infty_{\phi_{R,x_0}}(\mathbb{R}^n \setminus B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})} \le \varepsilon/2,$$

где $R(\varepsilon) := \alpha^{-1}\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}$ и $R_0 := 2\|\mathcal{A}\|_{\Phi_b}$. Поэтому,

$$\begin{aligned} N_{\varepsilon/2}(\mathcal{A} \cap B(L\varepsilon, S_1u_i, W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}), L^\infty_{\phi_{R,x_0}}) &\le N_{\varepsilon/2}(B(L\varepsilon, S_1u_i, W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}), L^\infty(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})) \\ &\le N_{1/2L}(B(1, 0, W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})), L^\infty(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})) \end{aligned}$$

(правая часть этого неравенства имеет смысл, так как вложение $W^{1,\infty}_{\phi}(V)\subset L^{\infty}_{\phi}(V)$ компактно для любой *ограниченной* области V и любой весовой функции ϕ). Более того, так как правая часть этого неравенства не зависит от i, то

$$\ln M(\varepsilon)\le \mathbb{H}_{1/2L}(B(1,0,W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})),L^{\infty}_{\phi_{R,x_0}}(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})) \tag{2.19}$$

и, следовательно, для завершения доказательства леммы, достаточно оценить $1/(2L)$-энтропию вложения единичного шара пространства $W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})$ в пространство $L^{\infty}_{\phi_{R,x_0}}(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})$. Для этого мы заметим, что отображение $Fu:=\phi^{-1}_{R,x_0}u$ осуществляет изоморфизм банаховых пар $(L^\infty(B^M_{x_0}),W^{1,\infty}(B^M_{x_0}))$ и $(L^\infty_{\phi_{R,x_0}}(B^M_{x_0}),W^{1,\infty}_{\phi_{R,x_0}}(B^M_{x_0}))$, для любого $M>0$. Более того, как нетрудно показать,

$$C_1\|Fu\|_{\mathbb{W}_{\phi_{R,x_0}}(B^M_{x_0})}\le\|u\|_{\mathbb{W}(B^M_{x_0})}\le C_2\|Fu\|_{\mathbb{W}_{\phi_{R,x_0}}(B^M_{x_0})}, \tag{2.20}$$

где $\mathbb{W}=L^\infty$ или $\mathbb{W}=W^{1,\infty}$, а константы C_1 и C_2 не зависят от x_0, R и M, см. [41]. Поэтому,

$$\ln M(\varepsilon)\le \mathbb{H}_{1/LL'}(B(1,0,W^{1,\infty}(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})),L^{\infty}(B^{R+R(\varepsilon)}_{x_0})), \tag{2.21}$$

где константа L' зависит только от C_1 и C_2. Использовав теперь субаддитивность колмогоровской энтропии в метрике L^∞ (см. предложение 3.2 ниже), нетрудно показать, что из (2.21) следует неравенство

$$M(\varepsilon)\le C'(R+R(\varepsilon))^n\mathbb{H}_{1/(LL')}\left(B(1,0,W^{1,\infty}(B^1_0)),L^\infty(B^1_0)\right)\le C''(R+\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon})^n, \tag{2.22}$$

где C'' не зависит от ε, x_0 и R. Оценки (2.18) и (2.22) завершают доказательство леммы 2.1.

Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы. Действительно, так как $\mathbb{H}_{R_0}(\mathcal{A},L^\infty_{\phi_{R,x_0}})=0$ для любых R и x_0 (напомним, что $\|\mathcal{A}\|_{L^\infty}\le R_0$), то, итерируя оценку (2.17) k-раз, получим

$$\mathbb{H}_{R_0/2^k}(\mathcal{A},L^\infty_{\phi_{R,x_0}})\le C_1(R+k)^nk, \tag{2.23}$$

где C_1 не зависит от k. Выбрав теперь k так, чтобы $\varepsilon\sim R_02^{-k}$, получим оценку

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A},L^\infty_{\phi_{R,x_0}}\right)\le C\left(R+\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}\right)^n\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}, \tag{2.24}$$

которая завершает доказательство теоремы 2.2.

Замечание 2.1. Универсальная оценка вида (2.13), которая является стандартным следствием сглаживающей оценки (1.16) для разностей между решениями, лежащими на аттракторе, была получена в [3] (для случая уравнений реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$) и в [41] (для случая автономных и неавтономных уравнений вида (0.1) в произвольной неограниченной области). Там же было показано, что эта оценка, в некотором смысле, является точной при всех значениях параметров ε, R и x_0 (см. также §7 ниже). В частном случае уравнения Гинзбурга-Ландау в R^n, $n<3$, и $R\gg(1/\varepsilon)^n$ эта оценка была доказана также в [19].

В заключение этого параграфа, мы получим одно важное следствие из этой теоремы, которое позволит доказать конечность ряда динамических характеристик аттрактора $\mathcal{A}$, введенных в следующих двух параграфах.

Следствие 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и пусть $\mathcal{K} \subset L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ – множество всех ограниченных решений уравнения* (0.1), *введенное в теореме 2.1. Тогда, для любого $L > 0$, справедлива оценка:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}\big|_{[0,L\ln\frac{1}{\varepsilon}]^{n+1}}, L^\infty([0,L\ln\frac{1}{\varepsilon}]^{n+1}) \right) \le C_L \left(\ln_+ \frac{R_0'}{\varepsilon} \right)^{n+1}, \tag{2.25}$$

где константы C_L и R_0' зависят от L, но не зависят от $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Введем весовую функцию

$$\varphi_{\varepsilon,L}(x) := \sup\nolimits_{y\in[0,L\ln\frac{1}{\varepsilon}]^n} e^{-\alpha|x-y|}, \tag{2.26}$$

где $\alpha > 0$ – такое же, как и в теореме 1.2. Тогда, так как аттрактор $\mathcal{A}$ ограничен в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, то, согласно (2.13),

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, L^\infty_{\varphi_{\varepsilon,L}}(\mathbb{R}^n)) \le \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{[-\alpha^{-1}\ln\frac{C}{\varepsilon}, L\ln\frac{1}{\varepsilon}+\alpha^{-1}\ln\frac{C}{\varepsilon}]^n}, L^\infty(\mathbb{R}^n) \right) \le C_L \left(\ln_+ \frac{R_0'}{\varepsilon} \right)^{n+1},$$

для некоторых констант $C := \|\mathcal{A}\|_{\Phi_b}$, C_L и R_0', не зависящих от $1 \ge \varepsilon > 0$.

С другой стороны, согласно предложению 1.2, (2.26) является весовой функцией экспоненциального роста α, и $C_{\phi_{\varepsilon,L}} \equiv 1$. Поэтому, из оценки (1.29) следует, что

$$\|S_t u_0 - S_t u_1\|_{L^\infty_{\varphi_{\varepsilon,L}}(\mathbb{R}^n)} \le C e^{Kt} \|u_0 - u_1\|_{L^\infty_{\varphi_{\varepsilon,L}}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u_0, u_1 \in \mathcal{A}, \tag{2.27}$$

где константа C не зависит от ε и L. Таким образом,

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{[0,L\ln\frac{1}{\varepsilon}]^{n+1}}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \right) \le \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{[0,L\ln\frac{1}{\varepsilon}]\times\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\varphi_{\varepsilon,L}}(\mathbb{R}^{n+1}) \right) \le$$
$$\mathbb{H}_{C^{-1}\varepsilon e^{-KL\ln 1/\varepsilon}}\left(\mathcal{A}, L^\infty_{\varphi_{\varepsilon,L}}(\mathbb{R}^n) \right) = \mathbb{H}_{C^{-1}\varepsilon^{KL+1}}\left(\mathcal{A}, L^\infty_{\varphi_{\varepsilon,L}}(\mathbb{R}^n) \right) \le C_L' \left(\ln_+ \frac{R_0''}{\varepsilon} \right)^{n+1}.$$

Следствие 2.1 доказано.

§3 Пространственно-временная топологическая энтропия аттрактора.

Мы начинаем исследование пространственно-временной динамики, порождаемой уравнением (0.1). Следуя работе [44], мы интерпретируем многопараметрическую полугруппу (1.6) как динамическую систему с многомерным временем, действующую на аттракторе $\mathcal{A}$, и будем описывать пространственно-временную структуру решений уравнения (0.1) при помощи динамических характеристик полугруппы (1.6), суженной на аттрактор. В этом параграфе мы введем и изучим топологическую энтропию действия многопараметрической полугруппы (1.6) на аттракторе. Мы начнем с напоминания одного из возможных определений топологической энтропии (см., например, [6] и цитированную там литературу для более детального изучения этого понятия).

Определение 3.1. Фиксируем некоторую (произвольную) весовую функцию, удовлетворяющую (2.2), и соответствующее ей весовое пространство $\Phi_\phi = L_\phi(\mathbb{R}^n)$. Тогда, согласно теореме 2.1, множество

$$(\mathcal{A}, d_\phi), \quad d_\phi(u_1, u_2) := \|u_1 - u_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \tag{3.1}$$

является компактным метрическим пространством. Для каждого $R > 0$ определим новую эквивалентную метрику на $\mathcal{A}$ по формуле:

$$d^R_\phi(u_1, u_2) := \sup\nolimits_{(t,h)\in[0,R]^{n+1}} d_\phi(S_{(t,h)}u_1 - S_{(t,h)}u_2), \quad u_1, u_2 \in \mathcal{A}. \tag{3.2}$$

Так как $(\mathcal{A}, d^R_\phi)$ – компактное метрическое пространство, то, для любого $\varepsilon > 0$, корректно определена колмогоровская ε-энтропия $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, d^R_\phi)$. По определению, пространственно-временной топологической энтропией аттрактора $\mathcal{A}$ называется топологическая энтропия действия полугруппы (1.6) на аттракторе $\mathcal{A}$, которая определяется следующим образом:

$$h_{top}(\mathcal{A}) := h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, d^R_\phi). \tag{3.3}$$

Напомним, что топологическая энтропия (3.3) зависит только от топологии в $\mathcal{A}$, но не от выбора метрики ее задающей (см. [6]). В частности, (3.3) не зависит от выбора весовой функции ϕ в (3.1). Поэтому, определение 3.1 корректно. В качестве следующего шага, мы получим более удобные формулы для вычисления величины (3.3). Для этого нам понадобится понятие средней колмогоровской ε-энтропии (см. [7]).

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{K}$ – локально компактное множество в $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда средней ε-энтропией $\mathcal{K}$ в L^∞ называется следующее число:

$$\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\right) := \limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{[0,R]^{n+1}}, L^\infty([0,R]^{n+1})\right). \tag{3.4}$$

(Более естественно, конечно, рассматривать сужения $\mathcal{K}$ на $[-R/2, R/2]^{n+1}$, но в дальнейшем мы рассматриваем только инвариантные (относительно группы 'пространственно-временных' сдвигов в $\mathbb{R}^{n+1}$ множества $\mathcal{K}$). Поэтому данное отличие не является существенным).

Следующее предложение дает выражение величины (3.3) в терминах средней ε-энтропии:

Предложение 3.1. *Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех ограниченных решений уравнения* (0.1)*, определенное в теореме 2.1. Тогда величина* (3.3) *может быть вычислена по следующей формуле:*

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = \lim\nolimits_{\varepsilon\to 0}\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\right). \tag{3.5}$$

Доказательство. Действительно, из определения множества $\mathcal{A}$ и величины (3.3) немедленно следует, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, d^R_\phi) = \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{[0,R]\times\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\phi_R}([0,R]\times\mathbb{R}^n)\right), \tag{3.6}$$

где $\phi_R(x) := \sup_{y\in[0,R]^n}\phi(x-y)$. Заметим теперь, что с, одной стороны,

$$\phi_R(x)\ge\phi(0)=c_0>0,\quad \text{при } x\in[0,R]^n, \tag{3.7}$$

а, с другой стороны, из условия (2.2) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $L(\varepsilon)$ (зависящее от ε, но не зависящее от R!), такое что

$$\phi_R(x)\le\varepsilon/\|\mathcal{K}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})},\quad \text{при } x\notin[-R(\varepsilon),R+R(\varepsilon)]^n. \tag{3.8}$$

Из неравенств (3.7) и (3.8) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{\varepsilon/c_0}\left(\mathcal{K}|_{[0,R]^{n+1}},L^\infty([0,R]^{n+1})\right)\le\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{[0,R]\times\mathbb{R}^n},L^\infty_{\phi_R}([0,R]\times\mathbb{R}^n)\right)\le\\ \le\mathbb{H}_{\varepsilon/C_0}\left(\mathcal{K}|_{[0,R+2R(\varepsilon)]^{n+1}}),L^\infty([0,R+2R(\varepsilon)]^{n+1})\right),\end{aligned} \tag{3.9}$$

где $C_0:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\phi(x)$. Разделив неравенство (3.9) на R^{n+1}, перейдя к пределу $R\to\infty$ и использовав (3.6) и тот факт, что $L(\varepsilon)$ не зависит от R, получим

$$\overline{\mathbb{H}}_{\varepsilon/c_0}\left(\mathcal{K},L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\right)\le\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A},d^R_\phi)\le\overline{\mathbb{H}}_{\varepsilon/C_0}\left(\mathcal{K},L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\right). \tag{3.10}$$

Перейдя к пределу $\varepsilon\to0$ в оценках (3.10), получим равенство (3.5). Предложение 3.1 доказано.

Ключевую роль в нашем дальнейшем изучении топологической энтропии (3.3) и ее обобщений играет следующая субаддитивность колмогоровской энтропии в L^∞-метрике.

Предложение 3.2. *Пусть V_1 и V_2 – две подобласти в $\mathbb{R}^M$ и $V=V_1\cup V_2$. Предположим также, что K – некоторое предкомпактное подмножество в $L^\infty(V)$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(K,L^\infty(V))\le\mathbb{H}_\varepsilon(K\big|_{V_1},L^\infty(V_1))+\mathbb{H}_\varepsilon(K\big|_{V_2},L^\infty(V_2)). \tag{3.11}$$

Действительно, пусть $\{v_i,\ i=1,\cdots,N_1\}$ и $\{w_j,j=1,\cdots,N_2\}$ – центры ε-шаров, в минимальных покрытиях $K\big|_{V_1}$ и $K\big|_{V_2}$. Тогда система ε-шаров в центрами в точках

$$V_{ij}\in L^\infty(V),\quad V_{i,j}(x)=\begin{cases}v_i(x), & x\in V_1,\\ w_j(x), & x\in V\backslash V_1,\end{cases}\quad i=1,\cdots,N_1,\quad j=1,\cdots,N_2 \tag{3.12}$$

покрывает все множество K, что и дает оценку (3.11).

Замечание 3.1. Вообще говоря, при более формальном изложении колмогоровской ε-энтропии, следует различать ε-энтропию $\mathbb{H}^{int}_\varepsilon(K,M)$, посчитанную по ε-покрытиям множества K шарами, центры которых принадлежат K, и ε-энтропию $\mathbb{H}^{ext}_\varepsilon(K,M)$, определение которой использует ε-шары, центры которых могут не принадлежать K. Более того, например, при выводе соотношения (3.6), естественно использовать $\mathbb{H}^{int}_\varepsilon$, тогда как субаддитивная оценка (3.11) справедлива только для $\mathbb{H}^{ext}_\varepsilon$. Однако, следующее очевидное соотношение:

$$\mathbb{H}^{ext}_\varepsilon(K,M)\le\mathbb{H}^{int}_\varepsilon(K,M)\le\mathbb{H}^{ext}_{\varepsilon/2}(K,M)$$

делает различие между этими энтропиями совершенно несущественным для излагаемой здесь теории. Поэтому, допуская некоторую вольность в обозначениях, мы используем один и тот же символ $\mathbb{H}_\varepsilon(K,M)$ для для обеих ε-энтропий.

Следствие 3.1. *Функция*

$$\Phi_{\mathcal{K}}(R_1, \cdots, R_n) := \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{[0,R_1]\times\cdots\times[0,R_n]}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\right) : (R_+)^{n+1} \to \mathbb{R}_+ \tag{3.13}$$

является субаддитивной по каждой переменной и, следовательно,

$$\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})) = \lim_{R_i\to\infty,\, i=1,\cdots,n} \Phi_{\mathcal{K}}(R_1, \cdots, R_n) = \tag{3.14}$$
$$= \inf_{R_i\in\mathbb{R}_+,\, i=1,\cdots,n} \Phi_{\mathcal{K}}(R_1, \cdots, R_n).$$

Действительно, субаддитивность функции (3.13) немедленно следует из неравенства (3.11) и инвариантности $\mathcal{K}$ относительно пространственно-временных трансляций, а формула (3.14) является стандартным следствием субаддитивности.

Замечание 3.2. Из формулы (3.5) и существования многократного предела (3.14) следует еще одно эквивалентное определение величины (3.3)

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{(2R)^n}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{[0,T]\times[-R,R]^n}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})), \tag{3.15}$$

которое совпадает с определением, так называемой, топологической энтропии на единицу объема, введенным в [20].

Теперь нетрудно проверить конечность величины (3.3) для пространственно-временной динамики, порождаемой уравнением (0.1).

Следствие 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда пространственно-временная топологическая энтропия аттрактора конечна:*

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) \le C < \infty. \tag{3.16}$$

Действительно, из субаддитивности функции (3.13) и оценки (2.25) следует, что (при $R > \ln 1/\varepsilon$) справедлива оценка:

$$H_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{[0,R]^{n+1}}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})) \le \tag{3.17}$$
$$\le (\frac{R}{\ln 1/\varepsilon} + 1)^{n+1}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}_{[0,\ln\frac{1}{\varepsilon}]^{n+1}}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \le C(R^{n+1} + R^n(\ln\frac{1}{\varepsilon})^{n+1}).$$

Подставив (3.17) в (3.4) и (3.5), получим оценку (3.16).

Следующая теорема показывает, что при вычислении величины $\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K})$ (а, следовательно, и $h_{top}(\mathcal{A})$), в качестве 'окон' можно использовать не только кубы $R\cdot[0,1]^{n+1}$, но и произвольные ограниченные области $R\cdot\Omega$, $R\in\mathbb{R}_+$ (см. (3.4) и (3.18)).

Теорема 3.1. *Пусть Ω – произвольное ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$ с кусочно-гладкой границей. Тогда, для любого $\varepsilon > 0$, справедливо равенство:*

$$\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K}, L^\infty(\mathbb{R}^n)) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega}, L^\infty(R\cdot\Omega)\right), \tag{3.18}$$

где $\mathrm{vol}(\Omega)$ *– мера Лебега множества* Ω *в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. Так как Ω ограничена, то, без ограничения общности, можно считать, что $\overline{\Omega}\subset(0,1)^{n+1}$. Для любого $M\in\mathbb{N}$, рассмотрим решетку $M^{-1}\mathbb{Z}^{n+1}$ и соответствующее ей покрытие пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ кубами $\mathcal{C}_l^M:=l+M^{-1}[0,1]^{n+1}$, $l\in M^{-1}\mathbb{Z}^{n+1}$. Введем также следующие множества:

$$\mathbb{Z}^M(\Omega):=\{l\in M^{-1}\mathbb{Z}^{n+1},\ \mathcal{C}_l^M\cap\Omega\neq\varnothing\},\quad \Omega_M:=\cup_{l\in\mathbb{Z}^M(\Omega)}\mathcal{C}_l^M. \tag{3.19}$$

Тогда, из вложения $\Omega\subset\Omega_M$, инвариантности $\mathcal{K}$ относительно пространственно-временных сдвигов и субаддитивности (3.11) следует оценка:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega})\le\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega_M})\le\sum_{l\in R\cdot\mathbb{Z}^M(\Omega)}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{\mathcal{C}_l^{RM}})\le\\ \le\#\mathbb{Z}^M(\Omega)\cdot\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{[0,M^{-1}R]^{n+1}})=\mathrm{vol}(\Omega_M)M^{-n-1}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{[0,M^{-1}R]^{n+1}}).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Разделив соотношение (3.20) на $R^{n+1}\,\mathrm{vol}(\Omega)$ и перейдя к пределу $R\to\infty$, получим

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega},L^\infty(R\cdot\Omega))\le\frac{\mathrm{vol}(\Omega_M)}{\mathrm{vol}(\Omega)}\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K},L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})). \tag{3.21}$$

Так как граница Ω предполагается кусочно гладкой, то $\mathrm{vol}(\Omega_M)$ стремится к $\mathrm{vol}(\Omega)$ при $M\to\infty$. Поэтому, из (3.21) следует неравенство

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)}\limsup\nolimits_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega},L^\infty(R\cdot\Omega))\le\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K},L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})). \tag{3.22}$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим множество $\Omega_1:=(0,1)^{n+1}\backslash\overline{\Omega}$. Тогда Ω_1 тоже удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, аналогично (3.22),

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega_1)}\limsup\nolimits_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega_1},L^\infty(R\cdot\Omega_1))\le\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K},L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})). \tag{3.23}$$

С другой стороны, из субаддитивности (3.11) следует, что

$$\frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{[0,R]^{n+1}})\le\frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(R\cdot\Omega)}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega})+\frac{\mathrm{vol}(\Omega_1)}{\mathrm{vol}(R\cdot\Omega_1)}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega_1}). \tag{3.24}$$

Так как $\mathrm{vol}(\Omega)+\mathrm{vol}(\Omega_1)=1$ и левая часть (3.24) стремится к $\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K},L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))$, то из (3.22), (3.23) и (3.24) следует существование предела в правой части (3.18) и его совпадение с $\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K},L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))$. Теорема 3.1 доказана.

В заключение этого параграфа, мы сформулируем одно полезное следствие доказанной теоремы.

Следствие 3.3. *Пусть* $(t',h'):=\mathbb{A}(t,h)$ *– произвольное линейное обратимое преобразование пространства-времени* $\mathbb{R}^{n+1}$ *и пусть*

$$\mathbb{S}'_{(t,h)}:=\mathbb{S}_{\mathbb{A}(t,h)}. \tag{3.25}$$

Тогда топологические энтропии полугрупп $\mathbb{S}'_{(t,h)}$ *и* $\mathbb{S}_{(t,h)}$ *связаны соотношением*

$$h_{top}(\mathcal{A},\mathbb{S}'_{(t,h)})=\det(\mathbb{A})h_{top}(\mathcal{A},\mathbb{S}_{(t,h)}). \tag{3.26}$$

Действительно, формула (3.26) немедленно следует из предложения 3.1, теоремы 3.1 и очевидного равенства $\mathrm{vol}(\mathbb{A}\Omega)=\det(\mathbb{A})\,\mathrm{vol}(\Omega)$.

§4 Обобщенные топологические энтропии по направлениям.

В этом параграфе мы введем ряд дополнительных динамических характеристик действия многопараметрической полугруппы (1.6) на аттракторе, связанных с некоторой выделенной гиперплоскостью в пространстве-времени $\mathbb{R}^{n+1}$, и получим некоторые соотношения между ними.

Определение 4.1. Пусть $V_k \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – произвольная k-мерная гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$. Определим соответствующую ей k-параметрическую подполугруппу расширенной полугруппы (1.6) по следующей формуле:

$$\mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)} := \{\mathbb{S}_{(t,h)}, \quad t \geq 0, \quad (t,h) \in V_k\}. \tag{4.1}$$

Замечание 4.1. Наиболее естественными примерами выбора гиперплоскостей V_k являются следующие:

1. $V_{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда, $\mathbb{S}^{V_{n+1}}_{(t,h)} = \mathbb{S}_{(t,h)}$ и, следовательно, полугруппа (4.1) совпадает с (1.6) и описывает пространственно-временную динамику, порождаемую уравнением (0.1).

2. $V_n := \mathbb{R}^n_x$. Тогда, очевидно, $\mathbb{S}^{V_n}_{(t,h)} = T_h$ и, следовательно, полугруппа (4.1) описывает пространственную структуру аттрактора $\mathcal{A}$.

3. $V_1 := \mathbb{R}^1_t$. В этом случае, $\mathbb{S}^{V_1}_{(t,h)} = S_t$ и, следовательно, полугруппа (4.1) описывает эволюцию во времени, порождаемую уравнением (4.1).

Заметим, однако, что и промежуточный выбор гиперплоскостей V_k, описывающий взаимодействие между пространственными и временными модами рассматриваемой системы (например, бегущие волны), также интересен, как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений.

Аналогично предыдущему параграфу, можно определить топологическую энтропию $h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)})$ действия подполугрупп (4.1) на аттракторе. Однако, как показано в следующих параграфах, при $k < n+1$, эти величины, как правило, оказываются бесконечными (даже если топологическая энтропия $h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)})$ равна нулю). Поэтому, следуя [44], мы введем обобщенные топологические энтропии $\widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)})$, которые оказываются конечными для случая динамики, порожденной уравнением (0.1).

Определение 4.2. Зафиксируем метрику пространства $L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)$ на аттракторе. Пусть V_k – произвольная гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$ и пусть $\{e_1, \cdots, e_k\}$ – ортонормированный базис в V_k, такой что

$$(t,x) := \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \in V_k^+ := V_k \cap \{t \geq 0\} \text{ для любых } \xi_i \geq 0.$$

Как и в определении 3.1, для любого $R > 0$, введем следующую эквивалентную метрику на аттракторе:

$$d^R_{V_k}(u_1, u_2) := \sup_{\xi \in [0,R]^k} \|\mathbb{S}_{\sum_{i=1}^k \xi_i e_i} u_1 - \mathbb{S}_{\sum_{i=1}^k \xi_i e_i} u_2\|_{L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.2}$$

По определению, обобщенной топологической энтропией полугруппы (4.1) является следующее число:

$$\widehat{h}_{top}^{n+1-k}\left(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k}\right) := \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n-1}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^k}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, d_{V_k}^R). \tag{4.3}$$

Замечание 4.2. Стандартные рассуждения, основанные на субаддитивности (3.11) (см., например, предложение 3.1 и теорему 3.1) показывают, что величина (4.3) зависит только от гиперплоскости V_k, но не от выбора ортонормированного базиса в ней. С другой стороны, в отличие от классической топологической энтропии $h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)})$ (или $h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k})$), обобщенные энтропии (4.3) не являются, вообще говоря, топологическими инвариантами и зависят, в частности, от способа метризации локальной топологии на аттракторе. В определении 4.1 мы зафиксировали наиболее естественный (с нашей точки зрения) выбор метризации этой топологии (при помощи экспоненциально убывающей весовой функции $\phi(x) = e^{-|x|}$). Более того, как будет показано в §10, при $k < n$, не существует разумных *топологических* инвариантов действия полугруппы $\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k}$ на аттракторе.

Следующее очевидное предложение показывает, что, подобно фрактальной размерности, обобщенные энтропии являются липшицевыми инвариантами.

Предложение 4.1. *Пусть имеется гомеоморфизм $T : (\mathcal{A}, d_1) \to (\bar{\mathcal{A}}, d_2)$, такой что отображения T и T^{-1} гельдеровы с показателем гельдеровости $\alpha \in (0, 1]$. Определим действие полугруппы $\bar{\mathbb{S}}_{(t,h)}$ на $(\bar{\mathcal{A}}, d_2)$ по формуле*

$$\bar{\mathbb{S}}_{(t,h)} := T \circ \mathbb{S}_{(t,h)} \circ T^{-1}.$$

Тогда обобщенные энтропии этих полугрупп удовлетворяют неравенствам

$$\alpha^{n+1-k}\widehat{h}_{top}^{n+1-k}((\bar{\mathcal{A}}, d_2), \bar{\mathbb{S}}_{(t,h)}^{V_k}) \le \widehat{h}_{top}^{n+1-k}((\mathcal{A}, d_1), \mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k}) \le \alpha^{k-n-1}h_{top}^{n+1-k}((\bar{\mathcal{A}}, d_2), \bar{\mathbb{S}}_{(t,h)}^{V_k}),$$

где мы использовали символ $(\mathcal{A}, d_1)$ для того, чтобы подчеркнуть зависимость обобщенных энтропий от метрики.

Для исследования обобщенных энтропий (4.3) удобно ввести следующие эквивалентные им величины.

Определение 4.3. Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех ограниченных решений уравнения (0.1), введенное в теореме 3.1. Определим действие $(n+1)$-параметрической группы $\{\mathbb{T}_{(s,h)},\ (s, h) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ по формуле

$$(\mathbb{T}_{(s,h)}u)(t, x) = u(t + s, x + h), \quad \mathbb{T}_{(s,h)}\mathcal{K} = \mathcal{K}. \tag{4.4}$$

Наделим множество $\mathcal{K}$ следующей метрикой:

$$d(u_1, u_2) := \|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{e^{-|(t,x)|}}(\mathbb{R}^{n+1})} \tag{4.5}$$

и, для любой гиперплоскости $V_k \subset \mathbb{R}^{n+1}$, определим, аналогично (4.3), обобщенные топологические энтропии $\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{K}, \mathbb{T}_{(s,h)}^{V_k})$.

Следующее предложение является аналогом предложения 3.1 и теоремы 3.1 для случая обобщенных энтропий по направлению.

Предложение 4.2. *Пусть V_k – произвольная k-мерная гиперплоскость в пространстве-времени $\mathbb{R}^{n+1}$, $V_k^\perp$ – ортогональное дополнение к ней и пусть $\Omega \subset V_k$ – произвольная область в V_k с кусочно-гладкой границей. Тогда справедлива следующая формула:*

$$
\begin{aligned}
(4.6)\quad & \widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{K}, \mathbb{T}^{V_k}_{(s,h)}) = \\
&\qquad = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1-k} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}_k(R\cdot\Omega)} \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\Omega\times V_k{}^\perp}, L^\infty_{\phi_{V_k}}(\mathbb{R}^{n+1})\right),
\end{aligned}
$$

где $\phi_{V_k}(t,x) := e^{-\operatorname{dist}((t,x),V_k)}$, *а* $\mathrm{vol}_k(V)$ *– мера Лебега в гиперплоскости* V_k.

Вывод формулы (4.6) почти дословно повторяет доказательство предложения 3.1 и теоремы 3.1 и, поэтому, не приводится.

Следующее предложение показывает, что энтропии, введенные в определении 4.3, в некотором смысле, эквивалентны обобщенным энтропиям аттрактора $\mathcal{A}$, введенным ранее.

Предложение 4.3. *Существует положительная константа C, такая что, для любой гиперплоскости V_k, справедлива следующая оценка:*

$$
(4.7)\qquad C^{-1}\widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{K}, \mathbb{T}^{V_k}_{(s,h)}) \le \widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)}) \le C\widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{K}, \mathbb{T}^{V_k}_{(s,h)}).
$$

Доказательство. Определим множество $\mathcal{K}^+ := \mathcal{K}\big|_{t\ge 0} \subset L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Тогда, так как аттрактор $\mathcal{A}$ ограничен в Φ_b, то, для любого $0 < \beta_1 \le \beta_2$ и любых $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$ справедливо неравенство

$$
(4.8)\quad \|u_1-u_2\|_{\Phi_{e^{-\beta_1|x|}}} \le \|u_1-u_2\|^{1-\beta_1/\beta_2}_{\Phi_b}\cdot\|u_1-u_2\|^{\beta_1/\beta_2}_{\Phi_{e^{-\beta_2|x|}}} \le C_1\|u_1-u_2\|^{\beta_1/\beta_2}_{\Phi_{e^{-\beta_2|x|}}}
$$

Поэтому, тождественное отображение

$$
(4.9)\qquad i : (\mathcal{A}, d_{e^{-|x|}}) \to (\mathcal{A}, d_{e^{-\alpha|x|}}),
$$

где $\alpha > 0$ – такое же, как и в теореме 1.2, является гельдеровым гомеоморфизмом. С другой стороны, согласно теореме 1.2, разрешающий оператор $\mathbb{S} : u_0 \to u$ задачи (0.1) задает липшицевый гомеоморфизм:

$$
\mathbb{S} : (\mathcal{A}, d_{e^{-\alpha|x|}}) \to (\mathcal{K}^+, d_{e^{-Kt-\alpha|x|}}),
$$

причем, этот гомеоморфизм, очевидно, переводит полугруппу $\mathbb{S}_{(t,h)}$ в полугруппу $\{\mathbb{T}_{(t,h)}, t \ge 0, h \in \mathbb{R}^n\}$. Наконец, аналогично (4.9), тождественное отображение

$$
j : (\mathcal{K}^+, d_{e^{-Lt-\alpha|x|}}) \to (\mathcal{K}^+, d_{e^{-|(t,x)|}})
$$

также является гельдеровым гомеоморфизмом. Таким образом, из предложения 4.1 следует, что

$$
(4.10)\qquad C_2^{-1}\widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{K}^+, \mathbb{T}^{V_k}_{(s,h)}) \le \widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)}) \le C_2\widehat{h}^{n+1-k}_{top}(\mathcal{K}^+, \mathbb{T}^{V_k}_{(s,h)}),
$$

для любой гиперплоскости V_k. Следовательно, для завершения доказательства предложения, достаточно показать, что

$$2^{k-n-1}\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{K},\mathbb{T}_{(s,h)}^{V_k}) \le \widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{K}^+,\mathbb{T}_{(s,h)}^{V_k}) \le \widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{K},\mathbb{T}_{(s,h)}^{V_k}). \tag{4.11}$$

Более того, так как правая часть неравенства (4.11) очевидна, достаточно проверить лишь его левую часть. Заметим, прежде всего, что $e^{-|(t,x)|} \le \varepsilon/R_0$, если $t \le -\ln\frac{R_0}{\varepsilon}$, где $R_0 := \|\mathcal{K}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$. Поэтому,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}, d_{V_k}^R) \le \mathbb{H}_\varepsilon(T_{-\ln\frac{R_0}{\varepsilon}}\mathcal{K}^+, d_{V_k}^R), \tag{4.12}$$

где $(T_s u)(t,x) := u(t+s,x)$. С другой стороны, так как функция $\phi(t,x)$ является весовой функцией экспоненциального роста 1 (с $C_\phi = 1$) в $\mathbb{R}^{n+1}$, то из неравенства (1.24) следует оценка: $(T_{\ln R_0/\varepsilon}\phi)(t,x) \le R_0\varepsilon^{-1}\phi(t,x)$. Поэтому,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(T_{-\ln\frac{R_0}{\varepsilon}}\mathcal{K}^+, d_{V_k}^R) \le \mathbb{H}_{\varepsilon^2/R_0}(\mathcal{K}^+, d_{V_k}^R). \tag{4.13}$$

Из оценок (4.12) и (4.13) следует, что

$$\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{K},\mathbb{T}_{(s,h)}^{V_k}) \le 2^{n+1-k}\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{K}^+,\mathbb{T}_{(s,h)}^{V_k}).$$

Предложение 4.3 доказано.

Теперь мы готовы доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда:*

1. для любой гиперплоскости $V_k \subset \mathbb{R}^{n+1}$, соответствующая обобщенная топологическая энтропия конечна:

$$\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{A},\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k}) \le C < \infty, \tag{4.14}$$

где константа C не зависит от выбора плоскости V_k;

2. для любых двух гиперплоскостей $V_k, V_{k'} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих условию $V_k \subset V_{k'}$, справедлива оценка

$$\widehat{h}_{top}^{n+1-k'}(\mathcal{A},\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_{k'}}) \le L^{k'-k}\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{A},\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k}), \tag{4.15}$$

где константа L также не зависит от гиперплоскостей V_k и $V_{k'}$.

Доказательство. Согласно предложению 4.3, достаточно проверить оценки (4.14) и (4.15) для энтропий $\widehat{h}_{top}^{V_k}(\mathcal{K},\mathbb{T}_{(s,h)}^{V_k})$. Докажем сначала оценку (4.14). Выберем в качестве области Ω в формуле (4.6) единичный куб $\mathcal{C}_{V_k}$, порожденный некоторым ортонормированным базисом $\{e_1,\cdots,e_k\}$ в V_k. Тогда,

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\mathcal{C}_{V_k}\times V_k^\perp}, L^\infty_{\phi_{V_k}}(\mathbb{R}^{n+1})\right) \le \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{\mathcal{O}_{\ln\frac{R_0}{\varepsilon}}(R\cdot\mathcal{C}_{V_k})}, L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\right), \tag{4.16}$$

где символом $\mathcal{O}_\delta(M)$ обозначена δ-окрестность множества M в $\mathbb{R}^{n+1}$. Из субаддитивности (3.11) и оценки (2.25) следует теперь, что

$$
\begin{aligned}
(4.17)\quad \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{\mathcal{O}_{\ln\frac{R_0}{\varepsilon}}(R\cdot\mathcal{C}_{V_k})}\right) &\le \left(\frac{R}{\ln R_0/\varepsilon}+1\right)^k \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{[0,\sqrt{n+1}\ln\frac{R_0}{\varepsilon}]^{n+1}}\right)\le\\
\le C\left(\frac{R}{\ln R_0/\varepsilon}+1\right)^k\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1} &= CR^k\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1-k}+C(R^{k-1}+1)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Подставив оценки (4.16) и (4.17) в правую часть формулы (4.6), получим требуемую оценку (4.14) для энтропии $\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{K},\mathbb{T}_{(s,h)}^{V_k})$.

Докажем теперь оценку (4.15). Очевидно, что достаточно доказать ее лишь для случая $k'=k+1$. Зафиксируем ортонормированный базис $\{e_1,\cdots,e_{k+1}\}$ в V_{k+1} так, чтобы векторы $\{e_1,\cdots,e_k\}$ образовывали ортонормированный базис в V_k. Тогда, очевидно, $\mathcal{C}_{V_{k+1}}=\mathcal{C}_{V_k}\times[0,1]$. Заметим, также, что из неравенства треугольника и определения весовых функций ϕ_{V_k} и $\phi_{V_{k+1}}$ следует оценка

$$
(4.18)\qquad \phi_{V_{k+1}}(t,x)\le\varepsilon^{-1}\phi_{V_k}(t,x),\quad \text{если}\quad \operatorname{dist}(\Pi_{V_{k+1}}(t,x),V_k)\le\ln\frac{1}{\varepsilon},
$$

где символом $\Pi_{V_{k+1}}$ обозначен ортопроектор на гиперплоскость V_{k+1}. Поэтому,

$$
(4.19)\qquad \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{(R\cdot\mathcal{C}_{V_k}\times[0,\ln\frac{1}{\varepsilon}])\times V_{k+1}^\perp},L^\infty_{\phi_{V_{k+1}}}\right)\le\mathbb{H}_{\varepsilon^2}\left(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\mathcal{C}_{V_k}\times V_k^\perp},L^\infty_{\phi_{V_k}}\right).
$$

Из оценки (4.19) и субаддитивности (3.11) немедленно следует, что, при достаточно больших R,

$$
(4.20)\qquad \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\mathcal{C}_{V_{k+1}}\times V_{k+1}^\perp},L^\infty_{\phi_{V_{k+1}}}\right)\le\left(\frac{R}{\ln 1/\varepsilon}+1\right)\mathbb{H}_{\varepsilon^2}\left(\mathcal{K}\big|_{R\cdot\mathcal{C}_{V_k}\times V_k^\perp},L^\infty_{\phi_{V_k}}\right).
$$

Умножив неравенство (4.20) на $R^{-k-1}(\ln 1/\varepsilon)^{n-k}$ и перейдя к пределу (сначала, по $R\to\infty$, а затем, по $\varepsilon\to 0$), получим следующую оценку:

$$
\widehat{h}_{top}^{n-k}\left(\mathcal{K},\mathbb{T}_{(s,h)}^{V_{k+1}}\right)\le 2^{n+1-k}\widehat{h}_{top}^{n+1-k}\left(\mathcal{K},\mathbb{T}_{s,h)}^{V_k}\right).
$$

Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.3. Предположим, что классическая топологическая энтропия полугруппы (1.6) строго положительна ($h_{top}(\mathcal{A},\mathbb{S}_{(t,h)})=\widehat{h}_{top}^0(\mathcal{A},\mathbb{S}_{(t,h)}^{\mathbb{R}^{n+1}})>0$), для некоторого уравнения вида (0.1) (примеры таких уравнений построены в работе [33]). Тогда из второй части теоремы 4.1 следует, что обобщенная энтропия, соответствующая произвольной гиперплоскости $V_k\subset\mathbb{R}^{n+1}$, также строго положительна. С другой стороны, предположим, что нульмерная энтропия (соответствующая 0-мерной гиперплоскости)

$$
(4.21)\qquad \widehat{h}_{top}^{n+1}(\mathcal{A},\mathbb{S}_{(t,h)}^{\{0\}})=\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-n-1}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A},L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)\right)
$$

равна нулю. Тогда все обобщенные топологические энтропии также равны нулю.

Более того, соотношение (4.15) можно интерпретировать как обобщение неравенства

$$h_{top}(\mathcal{A}) \leq L \dim_F(\mathcal{A}) \tag{4.22}$$

между фрактальной размерностью инвариантного множества и топологической энтропией классических динамических систем. Действительно, случаю ОДУ вида (0.1) соответствует $n = 0$. Поэтому, как нетрудно видеть величина (4.21) совпадает с фрактальной размерностью аттрактора, выбор же 'гиперплоскости' $V_1 = \mathbb{R}_t$ дает топологическую энтропию этой системы. Неравенство (4.15) в этом случае принимает классический вид (4.22). Продолжив эту аналогию, величину (4.21) можно трактовать как обобщенную фрактальную размерность аттрактора $\mathcal{A}$.

Замечание 4.4. Аналог предложения 4.2 может быть сформулирован и непосредственно для величин $\widehat{h}_{top}^{n+1-k}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k})$, см. [44]. Заметим, однако, что в отличие от энтропий, посчитанных по множеству $\mathcal{K}$, пространственные (x) и временные (t) переменные входят в формулу для подсчета обобщенных энтропий аттрактора $\mathcal{A}$ несимметричным образом, что приводит к более громоздким формулам и дополнительным неудобствам при их исследовании. Более того, возможность 'переставлять' пространственные и временные переменные будет играть существенную роль в нашем исследовании пространственно-временного хаоса (см. §10).

§5 Инъективность разрешающего оператора и эволюция пространственно-хаотических структур во времени.

В этом параграфе мы покажем, что полугруппа $\{S_t, t \geq 0\}$, порожденная уравнением (0.1), суженная на аттрактор $\mathcal{A}$, может быть продолжена до группы гельдеровых гомеоморфизмов аттрактора с показателем гельдеровости, сколь угодно близким к единице. Мы применим этот результат для изучения эволюции во времени обобщенных топологических энтропий по пространственным направлениям некоторых подмножеств аттрактора (которые, очевидно, инвариантны относительно пространственных сдвигов, но не инвариантны относительно S_t). Мы начнем со следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда, для любого $t \geq 0$, разрешающий оператор S_t задачи (0.1) обратим на аттракторе. Более того, для любого $\delta > 0$ и любого $t \geq 0$, существует $\alpha = \alpha(t, \delta) > 0$, такие что обратный оператор $S_{-t} := (S_t)^{-1}$ удовлетворяет следующей оценке:*

$$\|S_{-t}u_1 - S_{-t}u_2\|_{L^\infty_{e^{-\alpha|x|}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_1 - u_2\|^{1-\delta}_{L^\infty_{e^{-\alpha|x|/2}}(\mathbb{R}^n)}, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{A}, \tag{5.1}$$

где константа $C = C(t, \delta)$ не зависит от $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$.

Как обычно (см. [2], [43-44]), вывод оценки (5.1) основан на проверке свойства 'логарифмической выпуклости' для решений соответствующего линеаризованного уравнения. Для этого нам понадобится следующий абстрактный результат, доказанный в работе [13].

Лемма 5.1 [13]. *Пусть H – гильбертово пространство, $B : D(B) \to H$ – линейный (неограниченный) оператор в нем, а $v \in C^1([t_0, t_1], H) \cap C([t_0, t_1], D(B))$ – решение уравнения*

$$\partial_t v - Bv = P(t)v, \quad \|P(t)\|_{H\to H} \le P_0. \tag{5.2}$$

Предположим также, что $B = B_+ + B'_- + B''_-$, где B_+ симметрический оператор, а B'_- и B''_- антисимметрические операторы, такие что, для любого $w \in H$, выполнены условия

$$(B_+w, B'_-w)_H \ge -\gamma\|B_+w\|_H\|w\|_H - \beta\|w\|_H^2, \tag{5.3}$$

$$\|B''_-w\|_H^2 \le \gamma\|B_+w\|_H\|w\|_H + \beta\|w\|_H^2. \tag{5.4}$$

Определим функцию

$$l(t) := 2\ln\|u(t)\|_H - \int_{t_0}^t \psi(s)\,ds, \quad \psi(t) := 2\frac{(P(t)u(t), u(t))}{\|u(t)\|_H^2}. \tag{5.5}$$

Тогда, для любых $t_0 \le t \le t_1$, справедлива оценка

$$l(t) \le \alpha_\pm l(t_0) + (1-\alpha_\pm)l(t_1) + e^{4\gamma(t_1-t_0)}(t_1-t_0)^2(8\gamma^2 + 4\beta + 2P_0^2), \tag{5.6}$$

где

$$\alpha_\pm := \frac{e^{\pm 4\gamma t_1} - e^{\pm 4\gamma t}}{e^{\pm 4\gamma t_1} - e^{\pm 4\gamma t_0}}. \tag{5.7}$$

В (5.7) нужно взять знак минус, если $l(t_0) \le l(t_1)$ и знак плюс, если $l(t_0) \ge l(t_1)$.

Лемма 5.2. *Пусть выполнены предположения леммы 5.1 и пусть известно также, что решение $v(t)$ определено при $(-\infty, t_1]$ и ограничено $\|v(t)\|_H \le K$. Тогда, для любого $\mu > 0$ и $t \in (-\infty, t_1)$, существует константа $C = C(t, t_1, \mu, K)$, такая что*

$$\|u(t)\|_H \le C\|u(t_1)\|_H^{1-\delta}, \quad 1-\delta := e^{4\gamma(t-t_1)} - \mu. \tag{5.8}$$

Доказательство. Действительно, потенцируя оценку (5.6) и используя очевидное неравенство $-2P_0(t-t_0) \le \int_{t_0}^t \psi(s)\,ds \le 2P_0(t-t_0)$, получим

$$\|u(t)\|_H \le C(t, t_1, t_0)\|u(t_1)\|_H^{1-\alpha_\pm}\|u(t_0)\|_H^{\alpha_\pm}. \tag{5.9}$$

Так как $\|u(t_0)\|_H \le K$, то из (5.9) следует оценка

$$\|u(t)\|_H \le C'(K, t, t_0, t_1)\|u(t_1)\|_H^{1-\delta}, \tag{5.10}$$

где $\delta = \max\{\alpha_+, \alpha_-\}$. Фиксируем теперь $t_2 = -N$, где $N > 0$ – достаточно большое число. Тогда

$$1 - \delta = 1 - \alpha_+ = \frac{e^{4\gamma t} - e^{-4\gamma N}}{e^{4\gamma t_1} - e^{-4\gamma N}} \to e^{-4\gamma(t_1 - t)}, \tag{5.11}$$

при $N \to \infty$. Поэтому, для любого $\mu > 0$, существует $N = N(\mu)$, такое что $1 - \delta \geq e^{-4\gamma(t_1-t)} - \mu$. Лемма 5.2 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения уравнения (0.1), лежащие на аттракторе. Аналогично доказательству теоремы 1.2, введем функцию $w(t) := \phi_\alpha(x)(u_1(t) - u_2(t))$, где функция $\phi_\alpha(x) = \phi_{\alpha,0}(x)$ определена формулой (1.10), а $\alpha > 0$ – достаточно малое положительное число. Тогда, эта функция удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w - a\Delta_x w + (\vec{L}, \nabla_x)w + \lambda_0 w + l(t)w = L_1(x)w + L_2(x)\nabla_x w, \tag{5.12}$$

где операторы $L_i(x)$, $i = 1, 2$, вычисляются по формулам (1.12), а $l(t) := \int_0^1 f'(su_1(t) + (1-s)u_2(t))\, ds$. Мы утверждаем, что уравнение (5.12) имеет вид (5.2). Действительно, пусть $H = L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$B_+ := a\Delta_x - \lambda_0, \quad B'_- := -(\vec{L}, \nabla_x), \; B''_- := 1/2(L_2(x)\nabla_x - (L_2(x)\nabla_x)^*), \tag{5.13}$$

где $(L)^*$ – формально сопряженный к L оператор в метрике H, и $P(t) := L_1(x) - l(t) + 1/2(L_2(x)\nabla_x + (L_2(x)\nabla_x)^*)$. Тогда, так как симметрическая часть оператора $L_2(x)\nabla_x$, очевидно, является оператором нулевого порядка, то оператор $P(t)$, так определенный, удовлетворяет условию (5.2) с константой P_0, не зависящей от выбора решений $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$. Более того, элементарное интегрирование по частям показывает, что

$$(B_+ v, B'_- v) = 0, \quad \forall v \in D(B) := W^{2,2}(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому, условие (5.3) также выполнено. Проверим условие (5.4). Действительно, из оценок (1.13) и (1.14), интерполяционного неравенства и регулярности решений уравнения Лапласа в R^n следует оценка

$$\|B''_- v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\alpha\|v\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2\alpha\|v\|_H\|v\|_{D(B)} \leq C_3\alpha\|v\|_H\|B_+ v\|_H,$$

для некоторых констант C_i, $i = 1, 2, 3$, не зависящих от α. Таким образом, уравнение (5.10) удовлетворяет условиям леммы 5.1, и константа $\gamma := C_3\alpha$, где C_3 не зависит от α. Более того, из очевидной оценки

$$\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^\infty_{e^{-\alpha|x|/2}}(\mathbb{R}^n)} \tag{5.14}$$

и ограниченности множества $\mathcal{K}$ в $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ следует, что условия леммы 5.2 также выполнены (и константа K не зависит от u_1 и u_2). Следовательно, согласно лемме 5.2, справедлива оценка

$$\|w(-t-1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\alpha,t}\|u_1(0) - u_2(0)\|^{1-\delta}_{L^\infty_{e^{-\alpha|x|/2}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.15}$$

где константа $\delta = \delta(t, \alpha) > 0$ может быть сделана сколь угодно малой за счет уменьшения константы α. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что стандартная внутренняя оценка, примененная к параболическому уравнению (5.12), дает неравенство

$$\|w(-t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\|w(-t-1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.16}$$

где C не зависит от u_1 и u_2 (см., например, [5]). Подставив оценку (5.15) в правую часть (5.16), получим неравенство (5.1). Теорема 5.1 доказана.

Теперь мы готовы перейти к изучению эволюции во времени пространственной сложности решений уравнения (0.1), лежащих на аттракторе. Для этого нам понадобится следующее определение, аналогичное определениям 4.2 и 3.1.

Определение 5.1. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ – произвольное замкнутое пространственно-инвариантное подмножество аттрактора (то есть, $T_h\mathcal{M} = \mathcal{M}$, для любого $h \in \mathbb{R}^n$). Пусть также $\phi = \phi(x)$ – произвольная весовая функция, удовлетворяющая условию (2.2). Определим, для любого $R > 0$, следующую эквивалентную метрику на аттракторе:

$$d^R_\phi(u_1, u_2) := \sup\nolimits_{h\in[0,R]^n} \|T_h u_1 - T_h u_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.17}$$

По определению, пространственной топологической энтропией множества $\mathcal{M}$ называется следующая величина:

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M}, T_h) := \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^n}\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{M}, d^R_\phi). \tag{5.18}$$

Пусть теперь $u_0 \in \mathcal{A}$ – произвольная точка на аттракторе. Определим пространственную топологическую энтропию $\widehat{h}_{sp}(u_0)$ по следующей естественной формуле:

$$\widehat{h}_{sp}(u_0) := \widehat{h}_{sp}\left(\mathcal{H}_{sp}(u_0), T_h\right), \quad \mathcal{H}_{sp}(u_0) := \left[T_h u_0, h \in \mathbb{R}^n\right]_{\Phi_{loc}}. \tag{5.19}$$

Следующее предложение является аналогом предложения 3.1 и теоремы 3.2.

Предложение 5.1. *Величина* (5.18) *не зависит от выбора весовой функции ϕ и может быть вычислена по формуле:*

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M}, T_h) = \limsup\nolimits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\lim\nolimits_{R\to\infty}\frac{1}{\mathrm{vol}_n(R\cdot\Omega)}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{R\cdot\Omega}, L^\infty(R\cdot\Omega)\right), \tag{5.20}$$

где Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей.

Вывод формулы (5.20) дословно повторяет доказательство предложения 3.1 и теоремы 3.2 и, поэтому, не приводится.

Замечание 5.1. Выбрав $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ и весовую функцию $\phi(x) := e^{-|x|}$, получим очевидное равенство

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}, T_h) = \widehat{h}^1_{top}\left(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{\mathbb{R}^n_x}_{(t,h)}\right) \tag{5.21}$$

(см. определение 4.2). В частности, согласно теореме 4.2, отсюда следует конечность величины $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M},T_h)$ для любого $\mathcal{M}\subset\mathcal{A}$. Однако, как показывает предложение 5.1, в частном случае пространственной гиперплоскости $V_n:=\mathbb{R}^n_x$, обобщенная энтропия $\widehat{h}^1_{top}(\mathcal{A},T_h)$ *не зависит* от выбора весовой функции ϕ. Для того, чтобы подчеркнуть этот важный факт, мы повторили еще раз определение обобщенной энтропии вдоль гиперплоскости для частного случая пространственной гиперплоскости $V_n:=\mathbb{R}^n$ (см. определение 5.1).

Замечание 5.2. Стоит отметить, что в отличие от классической топологической энтропии $h_{top}(\mathcal{A},T_h)$, величина $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A},T_h)$ (или $\widehat{h}_{sp}(u_0)$), вообще говоря, не является топологическим инвариантом, хотя и не зависит от выбора весовой функции ϕ. Существует, однако, стандартная возможность (см., например, [31]) построить 'настоящий' топологический инвариант по величине $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A},T_h)=\widehat{h}_{sp}((\mathcal{A},d_\phi),T_h)$, а именно,

$$\dim_{sp}(\mathcal{A},T_h):=\inf\nolimits_d\widehat{h}_{sp}\left((\mathcal{A},d),T_h\right), \tag{5.22}$$

где инфинум берется по *всем возможным* метрикам, задающим локальную топологию в $\mathcal{A}$. В следующих параграфах мы покажем, что, при выполнении некоторых естественных условий на уравнение (0.1), существуют точки $u_0\in\mathcal{A}$, такие что $\widehat{h}_{sp}(u_0)$ (и даже $\dim_{sp}(u_0)$) оказываются строго положительными.

В заключение этого параграфа, мы покажем, что величины, введенные в определении 5.1, не изменяются вдоль траекторий динамической системы (1.4).

Следствие 5.1. *Пусть $\mathcal{M}\subset\mathcal{A}$ – произвольное пространственно-инвариантное подмножество аттрактора. Тогда, для любого $t\in\mathbb{R}$,*

$$\widehat{h}_{sp}\left(S_t\mathcal{M},T_h\right)=\widehat{h}_{sp}\left(\mathcal{M},T_h\right),\quad \text{в частности,}\quad \widehat{h}_{sp}(S_tu_0)=\widehat{h}_{sp}(u_0), \tag{5.23}$$

для любого $u_0\in\mathcal{A}$.

Действительно, так как, согласно теоремам 1.2 и 5.1, оператор S_t является гельдеровым гомеоморфизмом с показателем Гельдера, сколь угодно близким к единице (при соответствующем выборе весовых метрик в $\mathcal{M}$ и $S_t\mathcal{M}$, а энтропии (5.18) и (5.19) не зависят от выбора этих метрик), то формулы (5.23) немедленно следуют из предложения 4.1.

§6 Сильно-неустойчивые многообразия негиперболических положений равновесия.

Нашей следующей целью является получение оценок снизу для обобщенных энтропий, введенных в предыдущих параграфах. В этом параграфе мы излагаем абстрактную конструкцию построения сильно-неустойчивого инвариантного многообразия гладкого отображения в окрестности негиперболического положения равновесия, которая будет использована в дальнейшем (см. §7, §10) для изучения аттракторов параболических уравнений вида (0.1).

Предположим, что Φ – некоторое банахово пространство, и пусть $S : \Phi \to \Phi$ – нелинейное отображение, имеющее следующий вид:

$$S(u) = S_0 u + \mathcal{B}(u), \quad S_0 \in \mathcal{L}(\Phi, \Phi), \quad \mathcal{B} \in C^{1,\alpha}(\Phi, \Phi), \quad \mathcal{B}(0) = \mathcal{B}'(0) = 0, \tag{6.1}$$

где $0 < \alpha \le 1$ – некоторое положительное число, а $S_0 := S'(0)$ – производная Фреше оператора S в нуле. Мы предполагаем также, что нулевое положение равновесия отображения S является экспоненциально неустойчивым, то есть

$$r_0(S_0) := \sup |\sigma(S_0, \Phi)| > 1, \tag{6.2}$$

где символ $\sigma(S_0, \Phi)$ обозначает спектр линейного оператора S_0 в Φ, а символ $r_0(S_0)$ – его спектральный радиус. Для построения неустойчивого многообразия отображения S мы будем решать следующее разностное уравнение:

$$u_n = S(u_{n-1}) = S_0 u_{n-1} + \mathcal{B}(u_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}_- := \{0, -1, \cdots\} \tag{6.3}$$

в пространстве последовательностей $\{u_n\}_{n=0}^{-\infty}$ со значениями в банаховом пространстве Φ. Для этого нам понадобятся следующие пространства:

Определение 6.1. Пусть $\gamma > 0$ – произвольное положительное число. Определим пространство Φ-значных последовательностей $\mathbb{L}_\gamma = \mathbb{L}_\gamma(\mathbb{Z}_-, \Phi)$ следующим образом:

$$\mathbb{L}_\gamma := \left\{u = \{u_n\}_{n=0}^{-\infty}, \quad u_n \in \Phi, \quad \|u\|_{\mathbb{L}_\gamma} := \sup\nolimits_{n \in \mathbb{Z}_-} \left(\gamma^{-n} \|u_n\|_\Phi\right) < \infty\right\}. \tag{6.4}$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* (6.1) *и* (6.2). *Пусть также задано некоторое замкнутое инвариантное подпространство $\Phi_+ \subset \Phi$ линейного оператора S_0, удовлетворяющее следующему условию:*

$$\inf |\sigma(S_0\big|_{\Phi_+}, \Phi_+)| > \theta_0 > 1, \tag{6.5}$$

где θ_0 удовлетворяет неравенству

$$\theta_0^{1+\alpha} > r_0(S_0). \tag{6.6}$$

Тогда существует шар $B(\rho, 0, \Phi_+)$ радиуса $\rho > 0$ с центром в нуле в пространстве Φ_+ и гладкое ($C^{1+\alpha}$-гладкое) отображение

$$\mathbb{V} : B(\rho, 0, \Phi_+) \to \mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi), \tag{6.7}$$

такое что, для любого $v_+ \in \Phi_+$, последовательность $\mathbb{V}_n(v_+) := \mathbb{V}(v_+)(n)$, $n \in \mathbb{Z}_-$, удовлетворяет разностному уравнению (6.3), *и справедлива следующая оценка:*

$$\|\mathbb{V}_n(v_+) - \left(S_0\big|_{\Phi_+}\right)^n v_+\|_\Phi \le C\theta_0^{(1+\alpha)n} \|v_+\|_\Phi^{1+\alpha}, \tag{6.8}$$

где константа C не зависит от $v_+ \in B(\rho, 0, \Phi_+)$ и $n \in \mathbb{Z}_-$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что из условия (6.5) следует обратимость оператора $S_+ := S_0\big|_{\Phi_+}$ и условие

$$r_0(S_+^{-1}) < \theta_0^{-1}. \tag{6.9}$$

Поэтому выражение $S_+^n v_+$ в правой части формулы (6.8) имеет смысл. Более того, из (6.9) и стандартной формулы для спектрального радиуса следует, что последовательность $\mathcal{S}_+ v_+ := \{S_+^n v_+\}_{n=0}^{-\infty}$ лежит в пространстве $\mathbb{L}_{\theta_0}$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{S}_+ v_+\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}} \le C_1 \|v_+\|_\Phi. \tag{6.10}$$

Мы собираемся применить теорему о неявной функции к уравнению (6.3). Для этого нам понадобится следующий стандартный результат о разрешимости линейного неоднородного уравнения вида (6.3).

Лемма 6.1. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и пусть $\lambda_0 > r_0(S_0)$. Тогда существует непрерывный линейный оператор*

$$\mathbb{T}_{\lambda_0} : \mathbb{L}_{\lambda_0} \to \mathbb{L}_{\lambda_0}, \tag{6.11}$$

такой что, для любой последовательности $h = \{h_n\}_{n=0}^{-\infty} \in \mathbb{L}_{\lambda_0}$, последовательность $\{v_n\}_{n=0}^{-\infty} := \mathbb{T}_{\lambda_0} h$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$v_n = S_0 v_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}_-. \tag{6.12}$$

Доказательство. Искомый линейный оператор задается формулой

$$(\mathbb{T}_{\lambda_0} h)_n := \sum_{k=-\infty}^{n} S_0^{n-k} h_k. \tag{6.13}$$

Действительно, сходимость ряда в правой части (6.13) и оценка

$$\|\mathbb{T}_{\lambda_0} h\|_{\mathbb{L}_{\lambda_0}} \le C \|h\|_{\mathbb{L}_{\lambda_0}} \tag{6.14}$$

немедленно следуют из условия $\lambda_0 > r_0(S_0)$ и стандартной формулы для спектрального радиуса, а тот факт, что оператор (6.14) задает решение уравнения (6.12) легко проверяется подстановкой. Лемма 6.1 доказана.

Определим теперь действие нелинейного оператора $\bar{\mathcal{B}}$ на пространстве последовательностей по следующей формуле:

$$\bar{\mathcal{B}}(u)_n := \mathcal{B}(u_n), \quad u_n \in \mathbb{L}_1(\Phi), \tag{6.15}$$

где оператор $\mathcal{B}$ определен в формуле (6.1).

Лемма 6.2. *Пусть $\lambda_0 \ge 1$ – некоторое число. Тогда оператор $\bar{\mathcal{B}}$ принадлежит классу $C^{1,\alpha}(\mathbb{L}_{\lambda_0}, \mathbb{L}_{\lambda_0^{1+\alpha}})$, и справедливы оценки*

$$\|\bar{\mathcal{B}}(u)\|_{\mathbb{L}_{\lambda_0^{1+\alpha}}} \le C\|u\|^{1+\alpha}_{\mathbb{L}_{\lambda_0}} \tag{6.16}$$

и

$$\|\bar{\mathcal{B}}(u) - \bar{\mathcal{B}}(u_1) - \bar{\mathcal{B}}'(u)(u-u_1)\|_{\mathbb{L}_{\lambda_0^{1+\alpha}}} \le C\|u-u_1\|^{1+\alpha}_{\mathbb{L}_{\lambda_0}}, \tag{6.17}$$

где $u_1, u_2 \in \mathbb{L}_{\lambda_0}$, а константа C зависит, вообще говоря, от норм u_1 и u_2.

Доказательство. Действительно, так как $\mathcal{B} \in C^{1,\alpha}(\Phi, \Phi)$, то

$$\|\mathcal{B}(u_n) - \mathcal{B}(u_n^1) - \mathcal{B}'(u_n)(u_n - u_n^1)\|_\Phi \le C\|u_n - u_n^1\|^{1+\alpha}_\Phi \tag{6.18}$$

для некоторой константы $C = C(\|u\|_{\mathbb{L}_1}, \|u_1\|_{\mathbb{L}_1})$. Умножив неравенство (6.18) на $\lambda_0^{-(1+\alpha)n}$, взяв супремум по n от обеих частей этого неравенства и использовав очевидное вложение $\mathbb{L}_{\lambda_0} \subset \mathbb{L}_1$ (так как $\lambda_0 \ge 1$), мы получим неравенство (6.17). Для доказательства оценки (6.16) мы напомним. что $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}'(0) = 0$, следовательно,

$$\|\mathcal{B}(u_n)\|_\Phi \le C(\|u\|_{\mathbb{L}_1})\|u_n\|^{1+\alpha}_\Phi. \tag{6.19}$$

Умножив это неравенство на $\lambda_0^{-(1+\alpha)n}$ и взяв супремум по n, получим неравенство (6.16). Гладкость оператора $\bar{\mathcal{B}}$ ($\bar{\mathcal{B}} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{L}_{\lambda_0}, \mathbb{L}_{\lambda_0^{1+\alpha}})$) является стандартным следствием оценок (6.16) и (6.17). Лемма 6.2 доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы. Для этого мы обратим линейную часть уравнения (6.3) и перепишем его в следующей форме:

$$\mathcal{F}(v_+, u) = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{F}(v_+, u) := u - \mathbb{T}_{\theta_0^{1+\alpha}}\bar{\mathcal{B}}(u) - \mathcal{S}_+ v_+, \tag{6.20}$$

где $v_+ \in \Phi_+$, а $u \in \mathbb{L}_{\theta_0}$. Тогда, с одной стороны, согласно оценке (6.10) и леммам 6.1 и 6.2, функция $\mathcal{F}$ корректно определена (напомним, что $\theta_0^{1+\alpha} > r_0(S_0)$) и принадлежит классу $C^{1,\alpha}(\Phi_+ \times \mathbb{L}_{\theta_0}, \mathbb{L}_{\theta_0})$. Более того, $\mathcal{F}'_u(0,0) = Id$. С другой стороны, очевидно, что всякое решение уравнения (6.20) удовлетворяет равенству (6.3).

Таким образом, применив теорему о неявной функции к уравнению (6.20), мы построим $C^{1,\alpha}$-отображение $\mathbb{V} : B(\rho, 0, \Phi_+) \to \mathbb{L}_{\theta_0}$, где ρ – достаточно малое положительное число, такое что

$$\mathcal{F}(v_+, \mathbb{V}(v_+)) \equiv 0, \quad \forall v_+ \in B(\rho, 0, \Phi_+). \tag{6.21}$$

Более того, так как $\mathbb{V}(0) = 0$, то

$$\|\mathbb{V}(v_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}} \le C\|v_+\|_{\Phi_+}, \quad \forall v_+ \in B(\rho, 0, \Phi_+). \tag{6.22}$$

Остается проверить оценку (6.8). Действительно, из (6.21), (6.22) и лемм 6.1 и 6.2 следует, что

$$\|\mathbb{V}_n(v_+) - S_+^n v_+\|_\Phi \le \theta_0^{(1+\alpha)n}\|\mathbb{V}(v_+) - \mathcal{S}_+ v_+\|_{\mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}} = \theta_0^{(1+\alpha)n}\|\mathbb{T}_{\theta_0^{1+\alpha}}\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{V}(v_+))\|_{\mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}} \le$$
$$\le C_1\theta_0^{(1+\alpha)n}\|\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{V}(v_+))\|_{\mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}} \le C_2\theta_0^{(1+\alpha)n}\|\mathbb{V}(v_+)\|^{1+\alpha}_{\mathbb{L}_{\theta_0}} \le C_3\theta_0^{(1+\alpha)n}\|v_+\|^{1+\alpha}_\Phi.$$

Теорема 6.1 доказана.

Следствие 6.1. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1. Определим множество*

$$\mathcal{V}_0 := \{\mathbb{V}_0(v_+), \quad v_+ \in B(\rho, 0, \Phi_+)\}. \tag{6.23}$$

Тогда $\mathcal{V}_0$ является гладким ($C^{1,\alpha}$-гладким) подмногообразием в Φ, диффеоморфным Φ_+. Более того, справедлива оценка

$$\|\mathbb{V}_0(v_+) - v_+\|_\Phi \le C\|v_+\|_\Phi^{1+\alpha}, \quad \forall v_+ \in B(\rho, 0, \Phi_+), \tag{6.24}$$

и, следовательно, касательная плоскость в нуле к многообразию $\mathcal{V}_0$ совпадает с Φ_+.

Действительно, из уравнения (6.21) получаем: $\mathbb{V}_0'(0) = \mathrm{Id}_{\Phi_+}$. Поэтому, из теоремы о неявной функции следует, что $\mathcal{V}_0$ является $C^{1,\alpha}$-подмногообразием в Φ, диффеоморфным Φ_+. Остается заметить, что оценка (6.24) является немедленным следствием неравенства (6.8).

Замечание 6.1. Отметим, что, по построению, решение $u_n := \mathbb{V}_n(v_+)$ уравнения (6.3) принадлежит $\mathbb{L}_{\theta_0}$ и, следовательно, убывает при $n \to -\infty$ не медленнее чем θ_0^n ($\theta_0 > 1$). Поэтому мы называем $\mathcal{V}_0$ сильно-неустойчивым многообразием. С другой стороны, последовательность $v_n := \mathcal{S}_+^n v_+$ можно интерпретировать как единственное решение линейной разностной задачи

$$v_n = S_0 v_{n-1}, \quad v_0 = v_+, \quad v_n \in \Phi_+, \quad n \in \mathbb{Z}_-. \tag{6.25}$$

Более того, из (6.10) и (6.25) следует, что

$$C_\varepsilon (r_0 + \varepsilon)^n \|v_+\|_\Phi \le \|v_n\|_\Phi \le C_1 \theta_0^n \|v_+\|_\Phi, \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{6.26}$$

где C_1 и C_ε не зависят от v_+. Так как $\theta_0^{1+\alpha} > r_0$, то из формул (6.8) и (6.26) следует, что решение $u_n := \mathbb{V}_n(v_+)$ уравнения (6.3) притягивается к решению $v_n = \mathcal{S}_+^n v_+$ линейного уравнения (6.25). Следующий результат показывает, что решение $u_n = \mathbb{V}_n(v_+)$ однозначно характеризуется этим свойством.

Следствие 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1. Тогда существует положительное число δ_0, такое что, если $u = \{u_n\}_{n=0}^{-\infty}$ – решение уравнения (6.3), удовлетворяющее условиям:*

$$\|u\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}} \le \delta_0 \quad \text{и существует } v_+ \in B(\rho, 0, \Phi_+), \text{ такое что} \quad u - v \in \mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}, \quad v := \mathcal{S}_+ v_+,$$

то $u_n = \mathbb{V}_n(v_+)$ и, в частности, $u_0 \in \mathcal{V}_0$.

Действительно, так как $u - v \in \mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}$ и удовлетворяет уравнению

$$u_n - v_n - S_0(u_n - v_n) = \mathcal{B}(u_n), \tag{6.27}$$

то, согласно леммам 6.1 и 6.2, мы можем обратить линейную часть уравнения (6.27). Таким образом, пара (u, v_+) удовлетворяет соотношению (6.20). Так как решение $\mathbb{V}(v_+)$ уравнения (6.20), построенное по теореме о неявной функции, единственно (в малой окрестности), то $u = \mathbb{V}(v_+)$ (если константа δ_0 достаточно мала).

Следствие 6.3. *Многообразие $\mathcal{V}_0$ является локально-инвариантным относительно отображения S_0, то есть, существует положительное число δ_0', такое что, если $w \in \mathcal{V}_0$ и $\|w\|_\Phi \le \delta_0'$, то $S_0 w \in \mathcal{V}_0$.*

Действительно, это утверждение является очевидным следствием единственности решения $\mathbb{V}(v_+)$, доказанной в следствии 6.2.

Замечание 6.2. Отметим, что, в отличие от стандартных теорем о неустойчивых многообразиях (см., например, [1], [39]), мы не предполагали ни гиперболичности нулевого положения равновесия, ни существования спектрального проектора на подпространство Φ_+, ни даже дополняемости пространства Φ_+ в Φ.

В заключении этого параграфа, мы сформулируем еще два важных следствия доказанной теоремы.

Следствие 6.4. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1, $T : \Phi \to \Phi$ – некоторая (линейная) изометрия банахова пространства Φ, коммутирующая с оператором S: $T \circ S = S \circ T$ и пусть подпространство Φ_+ инвариантно относительно этой изометрии $T\Phi_+ \subset \Phi_+$. Тогда отображение $\mathbb{V}$, построенное в теореме 6.1, также инвариантно относительно изометрии T:*

$$\mathbb{V}_n(Tv_+) = T\mathbb{V}_n(v_+), \quad \forall v_+ \in B(\rho, 0, \Phi_+), \quad n \in \mathbb{Z}_-. \tag{6.28}$$

Действительно, наряду с $\mathbb{V}_n(v_+)$, $n \in \mathbb{Z}_-$, последовательность $T^{-1}\mathbb{V}_n(Tv_+)$ также является решением уравнения (6.3), которая тоже стремится к $v_n := \mathcal{S}_+^n v_+$ при $n \to -\infty$. Поэтому, согласно следствию 6.2, $T^{-1}\mathbb{V}_n(Tv_+) = \mathbb{V}_n(v_+)$.

Следствие 6.5. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и пусть Φ_1 – некоторое другое банахово пространство, содержащее пространство Φ: $\Phi \subset \Phi_1$. Предположим, также что линейный оператор S_0 продолжается до линейного непрерывного оператора в $\widetilde{S}_0$ в Φ_1, такого что*

$$\theta_0^{1+\alpha} > r_0(\widetilde{S}_0), \tag{6.29}$$

а последовательность $S_+^n v_+$ допускает следующую оценку:

$$\|S_+^n v_+\|_{\Phi_1} \le C\theta_0^n \|v_+\|_{\Phi_1}, \quad \forall v_+ \in B(2\rho, 0, \Phi_+). \tag{6.30}$$

Предположим, наконец, что нелинейный оператор $\mathcal{B}(u)$ допускает оценку:

$$\|\mathcal{B}(u) - \mathcal{B}(u_1)\|_{\Phi_1} \le C_1 \left(\|u\|_\Phi^\alpha + \|u_1\|_\Phi^\alpha\right) \|u - u_1\|_{\Phi_1}, \quad \forall u, u_1 \in B(R_0, 0, \Phi), \tag{6.31}$$

где $B(R_0, 0, \Phi)$ – R_0-шар в пространстве Φ, содержащий многообразие $\mathcal{V}_0$. Тогда существует положительное число $\rho_0 \le \rho$, которое зависит от констант C и C_1, такое что

$$C_2^{-1}\|v_+ - w_+\|_{\Phi_1} \le \|\mathbb{V}_0(v_+) - \mathbb{V}_0(w_+)\|_{\Phi_1} \le C_2\|v_+ - w_+\|_{\Phi_1}, \tag{6.32}$$

для любых $v_+, w_+ \in B(\rho_0, 0, \Phi_+)$ и некоторой константы C_2, зависящей от C и C_1.

Доказательство. По построению, последовательности $\mathbb{V}(v_+)$ и $\mathbb{V}(w_+)$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\mathbb{V}(v_+) - \mathbb{V}(w_+) - \mathcal{S}_+(v_+ - w_+) = \mathbb{T}_{\theta_0^{1+\alpha}}[\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{V}(v_+)) - \bar{\mathcal{B}}(\mathbb{V}(w_+))]. \tag{6.33}$$

Из условия (6.29) следует, что оператор $\mathbb{T}_{\theta_0^{1+\alpha}}$ продолжается до линейного непрерывного оператора в $\mathbb{L}_{\theta^{1+\alpha}}(\Phi_1)$. Поэтому, из (6.33), (6.31) и (6.22) следует оценка

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}_{\theta_0^{1+\alpha}}[\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{V}(v_+)) - \bar{\mathcal{B}}(\mathbb{V}(w_+))]\|_{\mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}(\Phi_1)} \le C'\|\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{V}(v_+)) - \bar{\mathcal{B}}(\mathbb{V}(w_+))\|_{\mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}(\Phi_1)} \le \\ \le C''\left(\|\mathbb{V}(v_+)\|^\alpha_{\mathbb{L}_{\theta_0}} + \|\mathbb{V}(w_+)\|^\alpha_{\mathbb{L}_{\theta_0}}\right)\|\mathbb{V}(v_+) - \mathbb{V}(w_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi_1)} \le \\ \le C'''\rho_0^\alpha\|\mathbb{V}(v_+) - \mathbb{V}(w_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi_1)},\end{aligned}$$

для любых $v_+, w_+ \in B(\rho_0, 0, \Phi_+)$, где константы C', C'' и C''' зависят только от C_1 и нормы оператора $\mathbb{T}_{\theta_0^{1+\alpha}}$ в пространстве $\mathbb{L}_{\theta^{1+\alpha}}(\Phi_1)$ (но не зависит от C). Предположив теперь, что $\rho_0 > 0$ удовлетворяет неравенству $C'''\rho_0^\alpha \le 1/2$ и использовав очевидное вложение $\mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}(\Phi_1) \subset \mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi_1)$ и равенство (6.33), получим

$$\frac{1}{2}\|\mathcal{S}_+(v_+ - w_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi_1)} \le \|\mathbb{V}(v_+) - \mathbb{V}(w_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi_1)} \le \frac{3}{2}\|\mathcal{S}_+(v_+ - w_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi_1)}, \tag{6.34}$$

справедливое для любых $v_+, w_+ \in B(\rho_0, 0, \Phi_+)$. Правая засть оценки (6.32) является немедленным следствием неравенства (6.34) и оценки (6.30). Для доказательства ее левой части заметим, что, согласно (6.33), (6.34) и (6.30),

$$\begin{aligned}\|\mathbb{V}_0(v_+) - \mathbb{V}_0(w_+) - (v_+ - w_+)\|_{\Phi_1} \le \|\mathbb{V}(v_+) - \mathbb{V}(w_+) - \mathcal{S}_+(v_+ - w_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0^{1+\alpha}}(\Phi_1)} \le \\ \le C'''\rho_0^\alpha\|\mathbb{V}(v_+) - \mathbb{V}(w_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi_1)} \le \frac{3}{2}C'''\rho_0^\alpha\|\mathcal{S}_+(v_+ - w_+)\|_{\mathbb{L}_{\theta_0}(\Phi_1)} \le \\ \le \frac{3}{2}CC'''\rho_0^\alpha\|v_+ - w_+\|_{\Phi_1}.\end{aligned}$$

Зафиксировав окончательно $\rho_0 > 0$ так, чтобы $\frac{3}{2}CC'''\rho_0^\alpha = 1/2$, получим

$$\|\mathbb{V}_0(v_+) - \mathbb{V}_0(w_+)\|_{\Phi_1} \ge \frac{1}{2}\|v_+ - w_+\|_{\Phi_1}.$$

Следствие 6.5 доказано.

Замечание 6.3. В дальнейшем, в качестве пространства Φ будет выбираться пространство $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, в качестве пространства Φ_1 – весовое пространство $L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)$, в качестве оператора S – разрешающий оператор уравнения (0.1) за единичное время, а в качестве изометрии T – группа T_h пространственных сдвигов.

§7 Сильно-неустойчивые многообразия уравнений реакции-диффузии и оценки снизу ε-энтропии аттрактора.

В этом параграфе мы применим абстрактную конструкцию сильно-неустойчивого многообразия к исследованию уравнения (0.1). Для реализации этой программы нам понадобятся следующие классические функциональные пространства.

Определение 7.1. Для любого $\sigma > 0$, обозначим через $\mathbb{B}_\sigma = \mathbb{B}_\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ подпространство $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, состоящее из функций u, преобразование Фурье $\widehat{u}$ которых имеет компактный носитель, лежащий в кубе $[-\sigma, \sigma]^n$:

$$\mathbb{B}_\sigma := \left\{u \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \quad \operatorname{supp} \widehat{u} \subset [-\sigma, \sigma]^n\right\}. \tag{7.1}$$

Введем также подпространство $\mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ пространства $\mathbb{B}_\sigma$, состоящее из вещественнозначных функций: $\mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma := \operatorname{Re} \mathbb{B}_\sigma$.

Как известно, пространство $\mathbb{B}_\sigma$ состоит из голоморфных функций экспоненциального роста (см., например, [7], [15]).

Нам понадобится также следующий подкласс весовых функций экспоненциального роста.

Определение 7.2. Назовем функцию $\phi \in C_{loc}(\mathbb{R}^n)$ весовой функцией полиномиального роста $N \in \mathbb{R}_+$, если выполнены следующие условия:

$$\phi(x) > 0, \quad \phi(x+y) \le C_\phi \left(1 + |y|\right)^N \phi(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{7.2}$$

Очевидно, что любая весовая функция полиномиального роста является весовой функцией экспоненциального роста ε (для любого $\varepsilon > 0$). Полиномиальным аналогом функций (1.10) являются следующие функции:

$$\psi_{l,x_0}(x) := \left(1 + |x - x_0|\right)^{-l}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{R}, \ l \neq 0. \tag{7.3}$$

Нетрудно проверить, что эти функции удовлетворяют неравенству (7.2) с показателем $N = |l|$ и константой $C_{\psi_{l,x_0}} = 1$. Более того, все свойства весовых функций экспоненциального роста, сформулированные в предложении 1.2, имеют очевидные аналоги для случая функций полиномиального роста. Например, аналогом пункта 5 предложения 1.2 является следующее предложение.

Предложение 7.1. *Пусть ϕ – весовая функция полиномиального роста N. Тогда, для любой $u \in L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)$, справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le \sup\nolimits_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{\phi(y) \|u\|_{L^\infty_{\psi_{N,y}}(\mathbb{R}^n)}\right\} \le C_\phi \|u\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)}, \tag{7.4}$$

где функция $\psi_{N,y}(x)$ определена в формуле (7.3).

Доказательство оценки (7.4) дословно повторяет вывод неравенства (1.28).

Теперь мы готовы сформулировать основной результат данного параграфа.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Предположим также, что*

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad \sigma(-f'(0) - \lambda_0, \mathbb{R}^k)) \cap \{\operatorname{Im} \lambda > 0\} \neq \varnothing. \tag{7.5}$$

Тогда существует комплексный вектор $e \in \mathbb{C}^k$, положительные числа σ и ρ_0, подпространство

$$\Phi_+ = \Phi_+(\sigma) := \operatorname{Re}[\mathbb{B}_\sigma \cdot e], \tag{7.6}$$

и гладкое ($C^{1,1}$-гладкое) отображение

$$\mathbb{V}_0 : B(\rho_0, 0, \Phi_+) \to \mathcal{A}, \quad \text{такое что} \;\; T_h \circ \mathbb{V}_0 = \mathbb{V}_0 \circ T_h \;\; \text{для любого } h \in \mathbb{R}^n \tag{7.7}$$

и

$$\|\mathbb{V}_0(v) - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\|v\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall v \in B(\rho_0, 0, \Phi_+). \tag{7.8}$$

Более того, для любой весовой функции ϕ полиномиального роста, справедливы следующие оценки:

$$C_1^{-1}\|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le \|\mathbb{V}_0(v_1) - \mathbb{V}_0(v_2)\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le C_1\|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)}, \tag{7.9}$$

для любых $v_1, v_2 \in B(\rho_0, 0, \Phi_+)$, причем константа C_1 зависит только от констант N и C_ϕ в неравенстве (7.2) и не зависит от конкретного вида весовой функции ϕ.

Доказательство. Мы хотим построить сильно-неустойчивое многообразие нулевого положения равновесия для разрешающего оператора $S = S_1 : \Phi_b \to \Phi_b$ уравнения (0.1) за единичное время. Для этого необходимо проверить условия теоремы 6.1 для данного конкретного случая. Действительно, в этом случае $\Phi = \Phi_b := L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $S_0 := D_{u_0}S_1(0)$, и $\mathcal{B}(u) := S(u) - S_0(u)$, где $D_{u_0}S_t(0)$ – разрешающий оператор линейного параболического уравнения

$$\partial_t v = a\Delta_x v - (\vec{L}, \nabla_x)v - f'(0)v - \lambda_0 v, \quad v\big|_{t=0} = v_0, \tag{7.10}$$

являющегося линеаризацией задачи (0.1) в окрестности нулевого положения равновесия. Тогда, согласно следствию 1.3, $\mathcal{B} \in C^{1,1}(\Phi_b, \Phi_b)$ и $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}'(0) = 0$. Поэтому, условие (6.1) выполнено. Более того, согласно (1.30), для любой весовой функции достаточно малого экспоненциального роста $\alpha \le \alpha_0$,

$$\|\mathcal{B}(u) - \mathcal{B}(u_1)\|_{\Phi_\phi} \le C\left(\|u\|_{\Phi_b} + \|u_1\|_{\Phi_b}\right)\|u - u_1\|_{\Phi_\phi}, \tag{7.11}$$

где C зависит от норм u и u_1 и константы C_ϕ в неравенстве (1.24) (но не зависит от конкретного вида ϕ). Поэтому, условие (6.31) также выполнено для $\Phi_1 = \Phi_\phi$. Таким образом, остается проверить условия на линейный оператор S_0. Для этого нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 7.1. *Спектральный радиус оператора S_0 вычисляется по следующей формуле:*

$$r_0(S_0) = e^{\max \operatorname{Re} \sigma(-f'(0)-\lambda_0, \mathbb{R}^k)} \tag{7.12}$$

и, следовательно, существует собственный вектор $e \in \mathbb{C}^k$ оператора $-f'(0) - \lambda_0$, соответствующий собственному значению Λ_0, такой что

$$r_0(S_0) = e^{\operatorname{Re} \Lambda_0}, \quad (-f'(0) - \lambda_0)e = \Lambda_0 e. \tag{7.13}$$

Доказательство. Действительно, так как функция $v(t) := e^{\Lambda t} e_\Lambda$ является (пространственно-однородным) решением уравнения (7.10) для любого $\Lambda \in \sigma(-f'(0) - \lambda_0)$ и соответствующего ему собственного вектора $e_\Lambda \in \mathbb{C}^k$, то

$$r_0(S_0) \geq e^{\max \operatorname{Re} \sigma(-f'(0)-\lambda_0, \mathbb{R}^k)}.$$

Докажем обратное неравенство. Пусть $M_0 := \max \operatorname{Re} \sigma(-f'(0) - \lambda_0, \mathbb{R}^k)$. Для любого $\delta > 0$, введем эквивалентную норму в пространстве $\mathbb{R}^k$ по следующей стандартной формуле:

$$\|v\|_\delta^2 := \int_0^\infty e^{(-M_0-\delta-A)t} v.v \, dt, \quad A := f'(0) + \lambda_0. \tag{7.14}$$

Интеграл в правой части (7.14) сходится, благодаря тому, что спектр оператора $-M_0 - \delta - A$ лежит в отрицательной полуплоскости. Более того, как нетрудно проверить,

$$(Av, v)_\delta \geq -(M_0 + \delta)\|v\|_\delta^2, \ \forall v \in \mathbb{R}^k. \tag{7.15}$$

Действительно, так как норма (7.14) не возрастает вдоль траекторий полугруппы $s_t := e^{(-M_0-\delta-A)t}$, то

$$\frac{d}{dt}\left(\|s_t v\|_\delta^2\right)\Big|_{t=0} = 2((-M_0 - \delta - A)v, v)_\delta \leq 0,$$

откуда и следует неравенство (7.15).

Введем теперь функцию $w(t,x) := \|v(t,x)\|_\delta^2$, где $v(t)$ – произвольное решение уравнения (7.10). Тогда, аналогично (1.2), эта функция удовлетворяет следующему неравенству:

$$\partial_t w - a\Delta_x w + (\vec{L}, \nabla_x)w - 2(M_0 + \delta)w \leq 0, \quad w\big|_{t=0} = \|v_0\|_\delta^2, \quad w\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7.16}$$

Применив классический принцип максимума к уравнению (7.16), получим

$$\|w(t)\|_{L^\infty} \leq e^{2(M_0+\delta)t}\|w(0)\|_{L^\infty}$$

и, следовательно, $r_0(S_0) \leq M_0 + \delta$. Так как $\delta > 0$ произвольно, то формула (7.12) доказана. Существование собственного вектора e и собственного значения Λ_0, удовлетворяющих (7.13), немедленно следует из (7.12). Лемма 7.1 доказана.

Таким образом, из условия (7.5) следует выполнение условия (6.2). Следующая лемма дает оценку для спектра оператора S_0 в весовых пространствах Φ_ϕ.

Лемма 7.2. *Пусть ϕ – весовая функция экспоненциального роста $\alpha > 0$, а $\widetilde{S}_0$ – расширение оператора S_0 до непрерывного оператора в Φ_ϕ. Тогда*

$$r_0(\widetilde{S}_0, \Phi_\phi) \le r_0(S_0, \Phi_b) + C\alpha, \tag{7.17}$$

где константа C не зависит от α, C_ϕ и конкретного вида весовой функции ϕ.

Доказательство. Заметим, что оператор умножения на весовую функцию ϕ^{-1} осуществляет изоморфизм пространств $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)$. Более того, в случае весовых функций (1.10), оператор $S_{\alpha,x_0} := \phi_{\alpha,x_0} \circ \widetilde{S}_0 \circ \phi^{-1}_{\alpha,x_0}$ является разрешающим оператором линейного параболического уравнения вида (1.11). Поэтому, из оценок (1.14) и принципа максимума, аналогично доказательству леммы 7.1, следует оценка

$$r_0(\widetilde{S}_0, \Phi_{\phi_{\alpha,x_0}}) = r_0(\widetilde{S}_{\alpha,x_0}, \Phi_b) \le r_0(S_0, \Phi_b) + C\alpha. \tag{7.18}$$

Формула (7.17) для произвольных весов ϕ стандартным образом выводится из этого частного случая, используя оценки (1.28) и инвариантность S_0 относительно группы пространственных сдвигов. Лемма 7.2 доказана.

Таким образом, условие (6.29) следует из условия (6.6) (для случая пространства $\Phi_1 = \Phi_\phi$ с весовой функцией достаточно малого экспоненциального роста). Остается проверить условия на инвариантное спектральное подпространство Φ_+.

Лемма 7.3. *Существуют $\theta_0 > 1$, удовлетворяющее условию (6.6), $\sigma > 0$ и инвариантное (относительно S_0 и T_h) подпространство Φ_+, определенное формулой (7.6), где вектор e удовлетворяет (7.13), такие что сужение S_+ оператора S_0 на инвариантное подпространство Φ_+ является обратимым и удовлетворяет условию (6.5). Более того, для любого $N > 0$ существует $\varepsilon_N > 0$, такое что*

$$\|\mathcal{S}_+^{-l} v_+\|_{\Phi_{\psi_{\varepsilon,N,x_0}}} \le C\theta_0^{-l} \|v_+\|_{\Phi_{\psi_{\varepsilon,N,x_0}}}, \quad \forall v_+ \in \Phi_+, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{7.19}$$

где $\psi_{\varepsilon,N,x_0}(x) := (1 + \varepsilon|x - x_0|)^{-N}$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_N$, а константа C не зависит от N, $\varepsilon \le \varepsilon_0$ и x_0.

Доказательство. Напомним, что оператор S_0 является разрешающим оператором за единичное время для уравнения (7.10). Поэтому, применив преобразование Фурье к уравнению (7.10), получаем следующую формулу:

$$\widehat{S_0^l v}(\xi) = e^{(-a|\xi|^2 - i\vec{L}.\xi - \lambda_0 - f'(0))l} \widehat{v}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{7.20}$$

Более того, из (7.20) и определения собственного вектора Λ_0 и подпространства Φ_+ следует более простая формула

$$\widehat{S_0{}^l v_+}(\xi) = e^{(-a|\xi|^2 - i\vec{L}.\xi + \Lambda_0)l} \widehat{v}_+, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{7.21}$$

для случая начальных условий $v_+ \in \Phi_+$. Из формулы (7.21) следует, в частности, инвариантность пространства Φ_+ относительно оператора S_0. Более того, так как преобразование Фурье любой функции из Φ_+ имеет компактный носитель, то из (7.21) следует, что оператор S_0 обратим на Φ_+ (при любом выборе показателя σ), и формула (7.21) справедлива для любого $l \in \mathbb{Z}$. Таким образом, остается подобрать показатель $\sigma > 0$, чтобы выполнялись неравенства (7.21). Зафиксируем (произвольное) число $\theta_0 > 1$, удовлетворяющее условию (6.6) (то есть, $\theta_0^2 > r_0(S_0) > \theta_0$; такое θ_0 существует, благодаря условию (7.5) и формуле (7.12)). Фиксируем также положительное число m_0, чтобы выполнялось неравенство

$$(7.22) \qquad |e^{-a|\xi|^2 - i\vec{L}.\xi + \Lambda_0}| = e^{-a|\xi|^2} e^{\mathrm{Re}\,\Lambda_0} = e^{-a|\xi|^2} r_0(S_0) > \theta_0, \quad \text{если } |\xi| \le m_0,$$

то есть, $m_0 < \sqrt{a^{-1} \ln \frac{r_0(S_0)}{\theta_0}}$. Мы утверждаем, что, если показатель $\sigma > 0$ удовлетворяет условию

$$(7.23) \qquad [-\sigma, \sigma]^n \subset B_0^{m_0/2}, \quad \text{то есть} \quad \sqrt{n}\sigma \le m_0/2,$$

то для любого $v_+ \in \Phi_+(\sigma)$ справедливы неравенства (7.19). Действительно, из формулы (7.21) и условий (7.22) и (7.23) следует, что решение $S_+^l v_+$, $v_+ \in \Phi_+$, может быть найдено следующим образом:

$$(7.24) \qquad S_+^{-l} v_+ = \theta_0^{-l} \Phi_l * v_+, \quad l \in \mathbb{N}, \quad \text{где} \quad \widehat{\Phi_l}(\xi) := e^{l[\ln\theta_0 - (-a|\xi|^2 - i\vec{L}.\xi + \Lambda_0)]} \psi(\xi),$$

символом $u * v$ обозначена свертка функций u и v в $\mathbb{R}^n$, а срезающая функция $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая что $\psi(\xi) = 1$ при $|\xi| \le m_0/2$ и $\psi(\xi) = 0$ при $|\xi| \ge m_0$. Заметим, что из условия (7.22) следует оценка

$$(7.25) \qquad \ln\theta_0 - (-a|\xi|^2 - i\vec{L}.\xi + \Lambda_0) \le -\mu_0, \quad \forall \xi \in B_0^{m_0},$$

для некоторого положительного μ_0. Поэтому, для любого $N \in \mathbb{N}$, справедливы оценки

$$(7.26) \qquad \|\widehat{\Phi_l}\|_{C^N(\mathbb{R}^n)} \le C_N \quad \text{и, следовательно,} \quad |\Phi_l(x)| \le C'_N (1 + |x|)^{-N},$$

причем константы C_N и C'_N зависят от N, но не зависят от $l \in \mathbb{N}$. Из формулы (7.24) и оценки (7.26) вытекает оценка

$$(7.27) \qquad \theta_0^l |(\mathcal{S}_+^{-l} v_+)(x)| \le \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} |\Phi_l(y)|^{1/2}\, dy \right) \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{ |v_+(y)| \cdot |\Phi_l(x-y)|^{1/2} \} \le$$
$$\le C \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{ |v_+(y)| \cdot |\Phi_l(x-y)|^{1/2} \},$$

где константа C не зависит от l и x. Умножив (7.27) на функцию $\psi_{\varepsilon,N,x_0}(x)$, взяв верхнюю грань по $x \in \mathbb{R}^n$ и использовав неравенство (7.2) для функций $\psi_{\varepsilon,N,x_0}(x)$ (в котором, очевидно, константа $C_{\psi_{\varepsilon,N,x_0}} = 1$), получим

$$\theta_0^l \|\mathcal{S}_+ v_+\|_{\Phi_{\psi_{\varepsilon,N,x_0}}} \le C \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}} \{ (1 + \varepsilon|y - x_0|)^{-N} (1 + \varepsilon|y - x|)^N |v_+(y)| \cdot |\Phi_l(x-y)|^{1/2} \} \le$$
$$\le C \left(\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{ (1 + \varepsilon|z|)^N |\Phi_l(z)|^{1/2} \} \right) \cdot \|v_+\|_{\Phi_{\varepsilon,N,x_0}}.$$

Более того, из оценки (7.26) нетрудно вывести, что для любого $N \in \mathbb{R}_+$ существует константа $\varepsilon_N = \varepsilon(N) > 0$ и константа K, не зависящая от N, такие что, для всякого $\varepsilon < \varepsilon_N$,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\{(1+\varepsilon|z|)^N|\Phi_l(z)|^{1/2}\} \le K.$$

Лемма 7.3 доказана.

Итак, все условия теоремы 6.1 проверены, поэтому существует сильно-неустойчивое многообразие $\mathcal{V}_0$ оператора S, соответствующее инвариантному подпространству Φ_+, построенному в лемме 7.3 и $C^{1,1}$-отображение $\mathbb{V}_0 : B(\rho, 0, \Phi_+) \to \mathcal{V}_0$, удовлетворяющее оценке (7.8). Заметим также, что каждому $u_0 := \mathbb{V}_0(v_+)$, $v_+ \in B(\rho, 0, \Phi_+)$ соответствует полная траектория $u(t) \in \mathcal{K}$ уравнения (0.1), определенная по формуле

$$u(t) := \begin{cases} S_{t-[t]}\mathbb{V}_{[t]}(v_+), & t \le 0, \\ S_t u_0, & t \ge 0, \end{cases}$$

где через $[t]$ обозначена целая часть t, а $\mathbb{V}_l$, $l \in \mathbb{Z}_-$, - операторы, построенные в теореме 6.1. Поэтому, согласно теореме 2.1, $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{A}$. Таким образом, остается проверить оценку (7.9), используя следствие 6.5. Для того, чтобы избежать зависимости радиуса ρ_0 от показателя N полиномиального роста весовой функции ϕ, мы будем использовать полиномиальные веса, введенные в Лемме 7.3:

$$\bar\psi_{N,x_0}(x) := (1+\varepsilon'_N|x-x_0|)^{-N}, \quad N \in \mathbb{R}_+, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{7.28}$$

где малый параметр $\varepsilon'_N > 0$ выбирается так, чтобы выполнялись оценка (7.19) (то есть, $\varepsilon'_N \le \varepsilon_N$) и неравенство (7.11) с константой C, не зависящей от N и x_0 (для этого достаточно выбрать ε'_N так чтобы

$$\bar\psi_{N,x_0}(x+y) \le (1+\varepsilon'_N|x|)^N\bar\psi_{N,x_0}(y) \le e^{\alpha|x|}\bar\psi_{N,x_0}(y)$$

для некоторого достаточно малого $\alpha > 0$). Выберем теперь в качестве пространства Φ_1 (в следствии 6.5) весовое пространство $\Phi_{\bar\psi_{N,x_0}}$. Тогда неравенство (6.31)) немедленно следует из (7.11). Более того, согласно лемме 7.2, условие (6.29) также выполнено, если константа $\alpha > 0$ достаточно мала, а условие (6.30) следует из оценки (7.19). Поэтому, согласно следствию 6.5, существует $\rho_0 > 0$, *не зависящее* от N, такое что оценка (7.9) справедлива для весовых функций $\phi = \bar\psi_{N,x_0}$, $N \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, где константа C_1 не зависит от x_0. С другой стороны, функции (7.28), очевидно, являются весовыми функциями полиномиального роста N, причем

$$C_N^{-1}(1+|x-x_0|)^{-N} \le \bar\psi_{N,x_0}(x) \le C_N(1+|x-x_0|)^{-N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.29}$$

где константа C_N зависит от N, но не зависит от x_0. Из оценки (7.29) и предложения 7.1 следует теперь справедливость оценки (7.9) для любой весовой функции полиномиального роста. Теорема 7.1 доказана.

Доказанная теорема позволяет вывести оценки снизу для ε-энтропии аттрактора, используя хорошо известные оценки для энтропии в пространствах $\mathbb{B}_\sigma$.

Следствие 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1. Тогда ε-энтропия сужения аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения (0.1), на шар $B^R_{x_0}$, допускает следующую оценку:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}, L^\infty(B^R_{x_0})\right) \geq C_{\mathcal{A}} R^n \ln_+ \frac{R_0'}{\varepsilon}, \tag{7.30}$$

где константы $R_0' > 0$ и $C > 0$ не зависят от ε, x_0 и R. Более того, для энтропии сужения аттрактора на единичный шар справедлива более точная оценка: для любого $\mu > 0$ существует $C_\mu > 0$, такое что

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{B^1_{x_0}}, L^\infty(B^1_{x_0})\right) \geq C_\mu \left(\ln \frac{R_0'}{\varepsilon}\right)^{n+1-\mu}. \tag{7.31}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что собственный вектор $e \in \mathbb{C}^k$, входящий в определение (7.6) подпространства Φ_+, нормирован так, чтобы $|\operatorname{Re} e| = 1$ (если $\operatorname{Re} e = 0$, то нужно взять вместо вектора e вектор $\bar{e}$). Пусть $v_1, v_2 \in B(\delta, 0, \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma)$, для некоторого $\delta \leq \rho_0$. Тогда, из оценки (7.8) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_0(v_1) - \mathbb{V}_0(v_2)\|_{L^\infty(B^R_{x_0})} \geq \|v_1 - v_2\|_{L^\infty(B^R_{x_0})} - \\ - \|\mathbb{V}_0(v_1) - v_1 \operatorname{Re} e\|_{\Phi_b} - \|\mathbb{V}_0(v_2) - v_2 \operatorname{Re} e\|_{\Phi_b} \geq \|v_1 - v_2\|_{L^\infty(B^R_{x_0})} - 2C\delta^2, \end{aligned} \tag{7.32}$$

для любых $R > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – произвольное достаточно малое число и пусть $\delta = 1/2(C\varepsilon)^{1/2}$. Тогда из формулы (7.32) и вложения (7.7) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\varepsilon/2}\left(\mathbb{A}|_{B^R_{x_0}}, L^\infty(B^R_{x_0})\right) \geq \mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1/2(C\varepsilon)^{1/2}, 0, \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma), L^\infty(B^R_{x_0})\right) = \\ = \mathbb{H}_{2C^{-1/2}\varepsilon^{1/2}}\left(B(1, 0, \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma), L^\infty(B^R_{x_0})\right). \end{aligned} \tag{7.33}$$

Поэтому, для вывода оценок (7.30) и (7.31), достаточно иметь аналогичные оценки для ε-энтропии единичного шара в пространствах $\mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma$, доказательство которых можно найти, например, в [7] и [41]. Следствие 7.1 доказано.

Замечание 7.1. Оценки (7.30) и (7.31) показывают, что оценка сверху (2.13) точна при всех значениях параметров ε, R и x_0. В частности, из (7.31) следует, что сужение аттрактора $\mathcal{A}$ на любую ограниченную область имеет бесконечную фрактальную размерность. Заметим еще, что используя более аккуратную (чем (7.31)) оценку снизу для ε-энтропии единичного шара в пространстве $\mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma$, можно получить следующую оценку для энтропии аттрактора

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}|_{B^1_{x_0}}, L^\infty(B^1_{x_0})) \geq C\left(\frac{\ln 1/\varepsilon}{(\ln\ln 1/\varepsilon)^n}\right)^{n+1}, \tag{7.34}$$

которая отличается от оценки сверху (2.13) на множитель, пропорциональный двойному логарифму ε. В дальнейшем, мы не будем использовать формулу (7.34) и поэтому не приводим ее доказательства.

Следствие 7.2. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1. Тогда обобщенная пространственная топологическая энтропия аттрактора $\mathcal{A}$ строго положительна:*

$$0 < C \le \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}, T_h) < \infty \quad \text{и, следовательно,} \quad h_{top}(\mathcal{A}, T_h) = \infty. \tag{7.35}$$

Действительно, конечность величины $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}, T_h)$ доказана в параграфе 4, а ее строгая положительность следует из (7.30) и формулы (5.20). Бесконечность классической топологической энтропии действия группы $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ является немедленным следствием положительности его обобщенной энтропии.

В заключение этого параграфа, мы сформулируем еще одно полезное следствие доказанной теоремы, дающее модельную динамическую систему для исследования пространственного хаоса на аттракторе.

Следствие 7.3. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1. Тогда существует отображение*

$$\widetilde{\mathbb{V}} : \mathcal{B}(\sigma) \to \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}(\sigma) := B(1, 0, \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_{\sigma}), \tag{7.36}$$

коммутирующее с группой $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ пространственных сдвигов и удовлетворяющее оценке

$$C_1^{-1}\|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le \|\widetilde{\mathbb{V}}(v_1) - \widetilde{\mathbb{V}}(v_2)\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le C_1\|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)}, \tag{7.37}$$

для любых $v_1, v_2 \in \mathcal{B}(\sigma)$, причем константа C_1 зависит только от констант N и C_ϕ в неравенстве (7.3) и не зависит от конкретного вида весовой функции ϕ. В частности,

$$\widehat{h}_{sp}(\widetilde{\mathbb{V}}(\mathcal{B}(\sigma)), T_h) = \widehat{h}_{sp}(\mathcal{B}(\sigma), T_h). \tag{7.38}$$

Действительно, из оценок (7.9) следует, что в качестве искомого отображения $\widetilde{\mathbb{V}}$ можно взять следующее отображение:

$$\widetilde{\mathbb{V}}(v) := \mathbb{V}_0(\rho_0^{-1} v \operatorname{Re} e), \quad \forall v \in \mathcal{B}(\sigma),$$

(как и в доказательстве следствия 7.1, предполагается что $|\operatorname{Re} e| = 1$), а формула (7.38) является немедленным следствием 'липшицевой' оценки (7.37) и независимости обобщенной пространственной энтропии от выбора весовой функции.

Замечание 7.2. Мы доказали теорему 7.1, предполагая, что $f(0) = 0$ и нулевое положение равновесия уравнения (0.1) является экспоненциально-неустойчивым. Однако, аналогичный результат справедлив и при более слабом предположении о существовании хотя бы одного пространственно-однородного экспоненциально-неустойчивого положения равновесия $z_0 \in \mathbb{R}^k$ ($f(z_0) + \lambda_0 z_0 = 0$). Действительно, очевидная замена $\widetilde{u} = u - z_0$ сводит этот случай к условиям теоремы 7.1.

Замечание 7.3. В рассматриваемом нами частном случае уравнений (0.1) со скалярной матрицей диффузии $a \in \mathbb{R}_+$, условие (7.5) эквивалентно (как показывает лемма 7.2) экспоненциальной неустойчивости нулевого положения равновесия. Однако, в случае матриц диффузии более общего вида (например, диагональных), условие (7.5) не является необходимым для экспоненциальной неустойчивости нулевого положения равновесия. Поэтому, условие (7.5) теоремы 7.1 заменяется условием

$$\sigma(a\Delta_x - (\vec{L}, \nabla_x) - f'(0) - \lambda_0, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \ne \varnothing,$$

см. [24], [43-44].

§8 Формула Котельникова и пространственный хаос в уравнениях реакции-диффузии.

В предыдущем параграфе мы построили (в следствии 7.3) липшицево вложение модельной группы $(\mathcal{B}(\sigma), T_h)$ пространственных сдвигов на единичном шаре пространства $\mathbb{B}_\sigma$ в группу $(\mathcal{A}, T_h)$ пространственных сдвигов, действующую на аттракторе. В настоящем параграфе мы исследуем эту модельную полугруппу с динамической точки зрения. В частности, используя некоторое обобщение классической формулы Котельникова-Картрайт для функций из $\mathbb{B}_\sigma$, мы получим описание порождаемой ею динамики в терминах вложений топологических схем Бернулли. Заметим, однако, что, в отличие от классических динамических систем, порождаемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, действие группы T_h на $\mathbb{B}_\sigma$ (и, соответственно, – на аттракторе $\mathcal{A}$) имеет бесконечную топологическую энтропию (см. следствие 7.2). Поэтому, классические схемы Бернулли с конечным числом символов не дают адекватного описания этой динамики, и мы будем использовать следующий вариант схемы Бернулли с бесконечным числом символов.

Определение 8.1. Пусть $\mathcal{M}_n := [-1,1]^{\mathbb{Z}^n}$. Тогда $\mathcal{M}_n$, снабженное тихоновской топологией, является компактным метризуемым пространством, причем метрика в нем может быть задана следующей формулой:

$$d_\phi(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{Z}^n)} := \sup_{n\in\mathbb{Z}^n}\{\phi(n)|v_1(n) - v_2(n)|\}, \quad v_1, v_2 \in \mathcal{M}_n, \tag{8.1}$$

где ϕ – произвольная весовая функция, удовлетворяющая условию (2.2), и пространство $\mathcal{M}_n$ интерпретируется как множество всех отображений $v : \mathbb{Z}^n \to [-1,1]$.

Определим действие группы $\mathbb{Z}^n$ на $\mathcal{M}_n$ следующим стандартным образом:

$$(\mathcal{T}_l v)(m) := v(l+m), \quad v \in \mathcal{M}_n, \quad l, m \in \mathbb{Z}^n, \tag{8.2}$$

и будем интерпретировать группу $(\mathcal{M}_n, \mathcal{T}_l)$ как (многомерную) схему Бернулли с континуальным числом символов $\omega \in [-1,1]$.

Наш метод исследования динамики, порождаемой группой $(\mathcal{B}(\sigma), T_h)$, базируется на следующем элементарном наблюдении: согласно классической формуле Котельникова (см., например, [7] или [15]), любая функция $w \in \mathbb{B}_\sigma(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ однозначно восстанавливается по своим значениям на решетке $\rho\mathbb{Z}$, $\rho := \pi/\sigma$,

$$w(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} w(\rho l)\frac{\sin(\sigma x - \pi l)}{\sigma x - \pi l}, \quad w \in \mathbb{B}_\sigma(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1) \tag{8.3}$$

(см. также формулу Котельникова-Картрайт (например, в [15]) для восстановления произвольной функции $w \in \mathbb{B}_\sigma$). Формула (8.3) позволяет по произвольной последовательности $v = \{v_l\}_{l=-\infty}^{\infty} \in l_2$ построить функцию $w \in \mathbb{B}_\sigma \cap L^2$, такую что $w(\rho l) = v_l$ для любого $l \in \mathbb{Z}$. Более того, сдвигу $\mathcal{T}_1 v$ последовательности v, очевидно, соответствует пространственный сдвиг $T_\rho w$ функции w, что и приводит к описанию динамики пространственных сдвигов на $\mathbb{B}_\sigma \cap L^2$ в терминах схем Бернулли, введенных в определении 8.1 (с дополнительным ограничением $\{v(l)\}_{l=-\infty}^{\infty} \in l_2$). Обобщив представление (8.3) на случай функций $\mathbb{B}_\sigma$ (в духе формулы Котельникова-Картрайт), получим следующий результат.

Теорема 8.1. *Для любого $\sigma > 0$ существуют положительное число ρ и отображение*

$$\mathbb{U} : \mathcal{M}_n \to \mathcal{B}(\sigma), \quad \text{такое что} \quad T_{\rho l} \circ \mathbb{U} = \mathbb{U} \circ \mathcal{T}_l, \quad l \in \mathbb{Z}^n. \tag{8.4}$$

Более того, для любой функции ϕ полиномиального роста, справедливы следующие оценки:

$$C_1^{-1} \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{Z}^n)} \le \|\mathbb{U}(v_1) - \mathbb{U}(v_2)\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{Z}^n)}, \tag{8.5}$$

где константа C_1 зависит от порядка N степенного роста функции ϕ и константы C_ϕ, но не зависит от $v_1, v_2 \in \mathcal{M}_n$ и конкретного вида функции ϕ.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_{\sigma/2}(\mathbb{R}^1)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(0) = 1, \quad |\psi(x)| \le C_N (1 + |x|)^{-N}, \quad \forall N \in \mathbb{N} \tag{8.6}$$

(достаточно взять произвольную функцию $\psi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющую условиям $\operatorname{supp}\psi_1 \subset [-\sigma/2, \sigma/2]$, $\psi_1(-\xi) = \psi_1(\xi)$ и $\int_{\mathbb{R}} \psi_1(\xi)\, d\xi = 1$ и определить ψ как обратное преобразование Фурье от ψ_1). Для любого $l \in \mathbb{Z}^n$, определим функции

$$\phi_l(x) := \Pi_{i=1}^n \phi_{l_i}(x_i), \quad \phi_{l_i}(x_i) := \frac{\sin(\sigma x_i/2 - \pi l_i)}{\sigma x_i/2 - \pi l_i} \psi(x_i - 2\pi l_i/\sigma). \tag{8.7}$$

Тогда, так как $\psi \in \mathbb{B}_{\sigma/2}$ и $\frac{\sin(\sigma x/2)}{x} \in \mathbb{B}_{\sigma/2}$, то $\phi_l \in \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, очевидно,

$$\phi_l(\rho m) = \delta_{l,m}, \ \forall l, m \in \mathbb{Z}^n, \quad \text{и} \quad |\phi_l(x)| \le C_N (1 + |x - \rho l|)^{-N}, \ \forall N \in \mathbb{N}, \tag{8.8}$$

где $\rho := 2\pi/\sigma$. Определим теперь искомый оператор $\mathbb{U}$ по формуле

$$(\mathbb{U}v)(x) := L^{-1} \sum\nolimits_{l \in \mathbb{Z}^n} v(l) \phi_l(x), \quad v \in \mathcal{M}_n, \tag{8.9}$$

где L – достаточно большое положительное число. Действительно, из оценки (8.8) вытекает, что, для любого $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |(\mathbb{U}v)(x)| &\le L^{-1} C_N \sum\nolimits_{l \in \mathbb{Z}^n} |v(l)| (1 + |x - \rho l|)^{-N} \le \\ &\le L^{-1} C(N, \rho) \sup\nolimits_{l \in \mathbb{Z}^n} \{ |v(l)| (1 + |x - l|)^{-N+n+1} \}, \end{aligned} \tag{8.10}$$

Откуда следует как сходимость ряда (8.9), так и правая часть оценки (8.5). В частности из (8.10) (с $\phi \equiv 1$) следует, что $\|\mathbb{U}(\mathcal{M}_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le CL^{-1}$. Поэтому, так как $\phi_l \in \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma$, то, при достаточно большом L, образ $\mathbb{U}(\mathcal{M}_n)$ лежит в $\mathcal{B}(\sigma)$. Коммутационное соотношение (8.4) является немедленным следствием определения (8.9) оператора $\mathbb{U}$. Таким образом, остается проверить левую часть оценки (8.5). Для этого мы заметим, что $(\mathbb{U}v)(\rho l) = v(l)$ для любого $l \in \mathbb{Z}^n$. Следовательно,

$$|v_1(l) - v_2(l)| = |\mathbb{U}(v_1)(\rho l) - \mathbb{U}(v_2)(\rho l)| \le C_N \sup\nolimits_{x \in \mathbb{R}^n} \{ |\mathbb{U}(v_1)(x) - \mathbb{U}(v_2)(x)| (1 + |x - l|)^{-N} \},$$

где константа C_N зависит от N, но не зависит от l. Из этой оценки и леммы 8.1 следует справедливость правой части оценки (8.5) для любой весовой функции ϕ полиномиального роста. Теорема 8.1 доказана.

Следствие 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1. Тогда существует положительное число ρ и отображение*

$$\mathcal{U} : \mathcal{M}_n \to \mathcal{A}, \quad T_{\rho l} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U} \circ \mathcal{T}_l, \quad \forall l \in \mathbb{Z}^n. \tag{8.11}$$

Более того, это отображение липшицево в любой весовой метрике с полиномиальным весом, то есть

$$C_2^{-1} \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{Z}^n)} \le \|\mathcal{U}(v_1) - \mathcal{U}(v_2)\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le C_2 \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{Z}^n)}, \tag{8.12}$$

где константа C_2 зависит от порядка N степенного роста функции ϕ и константы C_ϕ, но не зависит от $v_1, v_2 \in \mathcal{M}_n$ и конкретного вида функции ϕ.

Действительно, согласно следствию 7.3 и теореме 8.1, в качестве $\mathcal{U}$ можно взять отображение $\widetilde{\mathbb{V}} \circ \mathbb{U}$. Итак, гомеоморфное вложение схемы Бернулли $(\mathcal{M}_n, \mathcal{T}_l)$ в группу пространственных сдвигов аттрактора построено. В качестве первого следствия этого вложения, мы докажем существование $u_0 \in \mathcal{A}$ со строго положительной обобщенной пространственной энтропией (см. формулу (5.19)).

Следствие 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1. Тогда существуют $u_0 \in \mathcal{A}$, обобщенная пространственная энтропия которых строго положительна, то есть*

$$0 < C_1 \le \widehat{h}_{sp}(u_0) \le C_2 < \infty. \tag{8.13}$$

Действительно, так как $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{U}(\mathcal{M}_n)) > 0$, то в качестве u_0 можно взять образ $\mathcal{U}(v)$ произвольного элемента $v \in \mathcal{M}_n$, замыкание $\mathcal{T}_l$-орбиты которого совпадает с $\mathcal{M}_n$ (такие v, очевидно, существуют).

В заключение этого параграфа, мы покажем, что любая конечномерная динамика может быть реализована с точностью до гомеоморфизма как сужение группы пространственных сдвигов на подходящее инвариантное подмножество аттрактора $\mathcal{A}$.

Следствие 8.3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ – произвольный компакт в $\mathbb{R}^N$ и пусть F_i, $i = 1, \cdots, n$, – набор попарно-коммутирующих гомеоморфизмов компакта K, то есть*

$$F_i : K \to K, \quad i = 1, \cdots, n, \quad F_i \circ F_j = F_j \circ F_i, \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{8.14}$$

Тогда существует гомеоморфное вложение $\tau_K : K \to \mathcal{A}$ и положительное число σ_N, зависящее только от N, такие что

$$T_{\sigma_N e_{x_i}} \circ \tau_K = \tau_K \circ F_i, \quad i = 1, \cdots n, \tag{8.15}$$

где через e_{x_i} обозначен i-тый координатный вектор в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Согласно следствию 8.1, достаточно построить вложение $\widetilde{\tau}_K$ компакта K в схему Бернулли $(\mathcal{M}_n, \mathcal{T}_l)$, удовлетворяющее коммутационным соотношениям (8.15). Более того, без ограничения общности можно считать, что компакт K является подмножеством куба $[-1, 1]^{M^n}$, для некоторого M (такого что $M^n \ge N$).

Обозначим через $\{(x)_{i_1,\cdots,i_n},\ \ i_k = 0,\cdots, M-1\}$ координаты точки $x \in \mathbb{R}^{M^n}$. Тогда искомое отображение $\widetilde{\tau}_K : K \to \mathcal{M}_n$ задается стандартной формулой

$$\tau(k)(l) := (F^{(a_1)}\circ\cdots\circ F^{(a_n)}(k))_{b_1,\cdots,b_n},\ l_i = a_iM+b_i,\ a_i \in \mathbb{Z},\ b_i \in \{0,\cdots, M-1\},\ k \in K,$$

то есть $a_i = [l_i/M]$, а b_i – остаток от деления l_i на M (здесь и далее, через $F^{(l)}$, $l \in \mathbb{Z}$, обозначается l-тая итерация гомеоморфизма F).

Нетрудно проверить, что так определенное отображение является непрерывным вложением множества K в $\mathcal{M}_n$ и, следовательно, гомеоморфизмом K на $\widetilde{\tau}_K(K)$. Более того, из его определения следуют, коммутационные соотношения

$$\mathcal{T}_{Me_{x_i}} \circ \widetilde{\tau}_K = \widetilde{\tau}_K \circ F_i,\quad i = 1,\cdots, n.$$

Следствие 8.3 доказано.

Замечание 8.1. Как и в случае классических динамических систем, вложение схемы Бернулли $(\mathcal{M}_n, \mathcal{T}_l)$ в группу пространственных сдвигов на аттракторе, построенное в следствии 7.1, связано с наличием гомоклинических орбит. Действительно, функция $u_0 := \mathcal{U}(\delta_0)$, где $\delta_0(l) := \delta_{0l}$, является элементарной гомоклинической орбитой к нулевому положению равновесия. Более того, из оценок (8.12) следует, что $u_0(x)$ убывает при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|$. Заметим однако, что, в отличие от классического случая, формула (8.9) позволяет 'суммировать' соответствующие сдвиги элементарной гомоклины u_0 не только с коэффициентами $\omega_l \in \{0, 1\}$, но с любыми $\omega_l \in [-1, 1]$, что и приводит к вложению схемы Бернулли с бесконечным числом символов.

Замечание 8.2. Нетрудно показать (см., например, [31]), что

$$\dim_{sp}(\mathcal{M}_n, \mathcal{T}_l) = 1, \tag{8.16}$$

где $\dim_{sp}$ определяется по формуле (5.22). Таким образом, из вложения (8.11) следует положительность топологического инварианта (5.22) для действия группы пространственных сдвигов на аттракторе:

$$\dim_{sp}(\mathcal{A}, T_h) \geq C > 0. \tag{8.17}$$

§9 Построение вспомогательной пространственной динамической системы.

В предыдущем параграфе мы построили описание пространственного хаоса, возникающего на аттракторе $\mathcal{A}$, в терминах вложений схем Бернулли с бесконечным числом символов (см. следствие 8.1). Заметим, однако, что, по построению, образ $\mathcal{U}(\mathcal{M}_n)$ лежит в сильно-неустойчивом многообразии $\mathcal{V}_0$ нулевого положения равновесия уравнения (0.1). Поэтому, данная конструкция не дает осмысленной информации о характере временной динамики, порождаемой уравнением (0.1). Несмотря на это, существует возможность аналогичного описания временной динамики, порождаемой уравнением (0.1), использующая конструкцию сильно-неустойчивого многообразия (приведенную в параграфе 6) и некоторый трюк с 'перестановкой' пространственных и временных направлений. Действительно, если мы построим вспомогательную динамическую систему $\mathcal{S}_{x_1} : \Phi_b \to \Phi_b$ так, чтобы ее аттрактор совпадал бы (в некотором смысле) с аттрактором $\mathcal{A}$ исходной системы, пространственное направление x_1 играло бы роль времени, а переменные $(t, x_2, \cdots, x_n)$ играли бы роль пространственных переменных, то описание пространственного хаоса в этой вспомогательной динамической системе (аналогичное §6–§8) дало бы описание пространственно-временной динамики в исходной системе, соответствующей гиперплоскости $V_n := \operatorname{span}\{e_t, e_{x_2}, \cdots, e_{x_n}\}$.

Построение динамической системы с описанными выше свойствами и является основной целью данного параграфа. Прежде всего, мы заметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что вектор $\vec{L}$ в уравнении (0.1) направлен вдоль первого координатного вектора

$$\vec{L} = Le_{x_1}, \quad L \geq 0. \tag{9.1}$$

Действительно, общий случай сводится к (9.1) при помощи подходящей ортогональной замены координат $x' = Mx$, $M \in SO(n)$. Рассмотрим следующую параболическую краевую задачу в области $\Omega_{x_1} := \{t \in \mathbb{R}, \quad x_1 \in \mathbb{R}_+, \quad x_i \in \mathbb{R}, \ i = 2, \cdots, n\}$, построенную по уравнению (0.1):

$$\begin{cases} \partial_t u = a\partial_{x_1}^2 u - L\partial_{x_1} u + a\Delta_{x'} u - \lambda_0 u - f(u), \\ u\big|_{x_1=0} = u^0, \end{cases} \tag{9.2}$$

где $x' := (x_2, \cdots, x_n)$ и краевое условие u^0 предполагается принадлежащим пространству $\Psi_b := L^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}_{x'})$. Следующая теорема дает однозначную разрешимость этой краевой задачи, если число L является достаточно большим.

Теорема 9.1. *Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет (0.1), вектор $\vec{L}$ имеет вид (9.1) и выполнено следующее условие:*

$$L^2 - 4aK > 0, \tag{9.3}$$

где константа K такая же, как и в условии (0.3). Тогда, для любого $u^0 \in \Psi_b$, задача (9.2) имеет единственное решение $u(t, x)$, принадлежащее $L^\infty(\Omega_{x_1})$, и справедлива оценка

$$\|u(x_1)\|_{\Psi_b} \leq C\left(\|u^0\|_{\Psi_b} e^{-\alpha x_1} + 1\right), \tag{9.4}$$

где положительные константы C и α не зависят от u^0. Более того, для любых двух решений u_1 и u_2 задачи (9.2), принадлежащих $L^\infty(\Omega_{x_1})$, справедлива следующая оценка:

$$\|u_1(x_1) - u_2(x_1)\|_{\Psi_b} \leq Ce^{\Lambda_0 x_1}\|u_1(0) - u_2(0)\|_{\Psi_b}, \tag{9.5}$$

где $\Lambda_0 := \frac{L}{2a}$.

Доказательство. Докажем сначала оценку (9.4). Для этого, как и в доказательстве теоремы 1.1, рассмотрим функцию $v(t,x) = |u(t,x)|^2$, которая, очевидно, удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:

$$(9.6)\ \partial_t w - a\Delta_x w + L\partial_{x_1} w + 2\lambda_0 w = -2a|\nabla_x w(t,x)|^2 - 2f(u).u \le 2C, \quad w\big|_{x_1=0} = |u^0|^2.$$

Заметим, что функция $w_1(t,x) = w(x_1) := \|u^0\|^2_{\Psi_b} e^{-\alpha x_1} + \lambda_0^{-1} C$ удовлетворяет неравенству

$$\partial_t w_1 - a\Delta_x w_1 - L\partial_{x_1} w_1 + 2\lambda_0 w_1 \ge 2C,$$

если положительная константа α достаточно мала. Поэтому, согласно принципу максимума для ограниченных решений параболических неравенств вида (9.6) (см., например, [5]), получим оценку $w(t,x) \le w_1(t,x)$, которая доказывает оценку (9.4). Существование решения задачи (9.2) стандартным образом следует из оценки (9.4), см. [5]. Таким образом, остается проверить оценку (9.5).

Пусть u_1 и u_2 – два ограниченных решения задачи (9.2). Рассмотрим функцию $v(t,x) := e^{-\Lambda_0 x_1}(u_1(t,x) - u_2(t,x))$, которая, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$(9.7) \qquad \partial_t v - a\Delta_x v + \lambda_0 v + (L\Lambda_0 - a\Lambda_0^2 + l(t,x))v = 0, \quad w\big|_{x_1=0} = u_1(0) - u_2(0),$$

где $l(t,x) := \int_0^1 f'(su_1(t,x) + (1-s)u_2(t,x))\,ds$. Согласно условиям (0.3) и (9.3), справедлива оценка

$$(9.8) \qquad L\Lambda_0 - a\Lambda_0^2 + l(t,x) \ge L\Lambda_0 - a\Lambda_0^2 + K > 0$$

и, следовательно, функция $w(t,x) = |v(t,x)|^2$ удовлетворяет дифференциальному неравенству вида

$$(9.9) \qquad \partial_t w - a\Delta_x w + 2\lambda_0 w \le 0, \quad w\big|_{x_1=0} = |u_1(0) - u_2(0)|^2.$$

Применив принцип максимума к неравенству (9.9) (напомним, что $\Lambda_0 > 0$, поэтому $w \in L^\infty(\Omega_{x_1})$), получим оценку (9.5). Теорема 9.1 доказана.

Следствие 9.1. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1. Тогда задача* (9.2) *порождает липшицеву полугруппу*

$$(9.10) \qquad \mathcal{S}_{x_1} : \Psi_b \to \Psi_b, \quad \mathcal{S}_{x_1} u^0 := u(x_1), \quad \text{где } u(x_1) \text{ – решение } (9.2).$$

Следующее утверждение показывает, что полугруппа (9.10) является липшицевой не только в Ψ_b но и в весовых пространствах Ψ_ϕ, где ϕ – весовая функция достаточно малого экспоненциального роста.

Следствие 9.2. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1. Тогда, для любой весовой функции ϕ достаточно малого экспоненциального роста $\alpha \le \varepsilon_0$, справедлива оценка*

$$\|\mathcal{S}_{x_1}u^0 - \mathcal{S}_{x_1}u_1^0\|_{\Psi_\phi} \le Ce^{\Lambda_0 x_1}\|u^0 - u_1^0\|_{\Psi_\phi}, \tag{9.11}$$

где константа C зависит от C_ϕ, но не зависит от вида весовой функции ϕ.

Действительно, рассуждая аналогично выводу оценки (9.5), и применив трюк с умножением на весовые функции (1.10), описанный в доказательстве теоремы 1.2, к неравенству (9.9), нетрудно получить оценку (9.11) (вместо этого трюка, можно воспользоваться явными оценками для функции Грина задачи (9.9), которая экспоненциально убывает на бесконечности, благодаря наличию слагаемого $\lambda_0 w$ с $\lambda_0 > 0$, см. [5]).

Нашей следующей целью является доказательство дифференцируемости полугруппы (9.10) по 'начальным условиям' и получения аналога следствия 1.4. Для этого нужно сначала рассмотреть 'уравнение в вариациях', соответствующее задаче (9.2). Действительно, пусть $u(x_1) := \mathcal{S}_{x_1}u^0$ – произвольная траектория полугруппы (9.10). Рассмотрим следующий неоднородный аналог линеаризации уравнения (9.10) вдоль этой траектории:

$$\partial_t v - a\Delta_x v + L\partial_{x_1} v + \lambda_0 v + f'(u(t,x))v = h(t,x), \quad v\big|_{x_1=0} = v^0, \tag{9.12}$$

для некоторой внешней силы $h(t,x)$. Следующее предложение дает однозначную разрешимость задачи (9.12) в соответствующем функциональном пространстве.

Предложение 9.1. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1 и пусть*

$$e^{-\Lambda_0 x_1}h \in L^\infty(\Omega_{x_1}), \quad \Lambda_0 := L/(2a). \tag{9.13}$$

Тогда задача (9.12) *имеет единственное решение в классе*

$$e^{-\Lambda_0 x_1}v \in L^\infty(\Omega_{x_1}) \tag{9.14}$$

и, для любой весовой функции ϕ экспоненциального роста $\alpha \le \varepsilon_0$, справедлива оценка

$$\|v(x_1)\|_{\Psi_\phi} \le Ce^{-(\Lambda_0-\beta)x_1}\|v^0\|_{\Psi_\phi} + \sup_{y\in\mathbb{R}_+}\{e^{\Lambda_0(x_1-y)-\beta|x_1-y|}\|h(y)\|_{\Psi_\phi}\}, \tag{9.15}$$

где положительные константы C и β не зависят от u^0 и вида весовой функции ϕ.

Схема доказательства. Аналогично доказательству теоремы 9.1, функция $w(t,x) := e^{-2\Lambda_0 x_1}|v(t,x)|^2$ удовлетворяет неравенству

$$\partial_t w - a\Delta_x w + \lambda_0 w \le C|\widetilde{h}(t,x)|^2, \quad \widetilde{h} := e^{-\Lambda_0 x_1}h(t,x). \tag{9.16}$$

Используя принцип максимума и трюк с умножением уравнения (9.16) на весовую функцию $e^{-\varepsilon\sqrt{1+|(t,x)-(t_0,x_0)|^2}}$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$, аналогично доказательству теоремы 1.2, нетрудно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} w(t,x) \le Ce^{-\varepsilon x_1}\sup_{(t_0,x_0')\in\mathbb{R}^n}\{e^{-\varepsilon|(t,x')-(t_0,x_0')|}|v^0(t_0,x_0')|^2\}+ \\ +\sup_{(t_0,x_0)\in\Omega_{x_1}}\{e^{-\varepsilon|(t,x)-(t_0,x_0)|}|\widetilde{h}(t,x)|^2\}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Из оценки (9.17) и формул (1.28) следует оценка (9.15) для любой весовой функции экспоненциального роста $\alpha < \varepsilon/2$, что и доказывает предложение 9.2 (как и в доказательстве следствия 9.2, оценка (9.17) является немедленным следствием экспоненциального убывания на бесконечности функции Грина уравнения (9.16)).

Теперь мы готовы проверить дифференцируемость полугруппы (9.1).

Теорема 9.2. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1. Тогда полугруппа* (9.10), *порождаемая задачей* (9.2), *принадлежит классу* $C^{1,\alpha}(\Psi_b, \Psi_b)$ *для некоторого* $0 < \alpha \le 1$, *и ее производная Фреше вычисляется по формуле* $D_{u^0}\mathcal{S}_{x_1}(u_0)\xi := v_\xi(x_1)$, *где* $v_\xi(x_1)$ *– единственное решение задачи* (9.12) *с* $h = 0$ *и* $v^0 = \xi$, *построенное в предложении 9.1. Более того, для любой весовой функции* ϕ *достаточно малого экспоненциального роста и любых* $u^0, u_1^0 \in \Psi_b \cap \Psi_\phi$ *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{S}_{x_1}(u^0) - \mathcal{S}_{x_1}(u_1^0) - D_{u^0}\mathcal{S}_{x_1}(u^0)(u^0 - u_1^0)\|_{\Psi_\phi} \le Ce^{\Lambda_0 t}\|u^0 - u_1^0\|_{\Psi_b}^{\alpha}\|u^0 - u_1^0\|_{\Psi_\phi}, \tag{9.18}$$

где константа C *зависит только от* Ψ_b*-норм начальных условий* u_0 *и* u_1 *и от константы* C_ϕ *в неравенстве* (1.24) *(и не зависит от вида весовой функции* ϕ*).*

Доказательство. Пусть $u(t,x)$ и $u_1(t,x)$ – два решения задачи (9.2), соответствующие краевым условиям u^0 и u_1^0, а $v(t,x)$ – решение задачи (9.12) с $h = 0$ и $v^0 = u^0 - u_1^0$. Тогда функция $w(t,x) := u(t,x) - u_1(t,x) - v(t,x)$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w - a\Delta_x w + L\partial_{x_1} w + \lambda_0 w + f'(u(t,x))w = h_{u,u_1}(t,x), \quad w\big|_{x_1=0} = 0, \tag{9.19}$$

где $h_{u,u_1}(t,x) := \int_0^1 [f'(u(t,x) - s(u(t,x) - u_1(t,x))) - f'(u(t,x))]\, ds \cdot v(t,x)$. Заметим также, что из оценки (9.15) следует неравенство

$$\|v(x_1)\|_{\Psi_\phi} \le Ce^{(\Lambda_0 - \beta)x_1}\|u^0 - u_1^0\|_{\Psi_\phi} \tag{9.20}$$

для некоторого положительного β, не зависящего от ϕ, u^0 и u_1^0. Таким образом, так как $f \in C^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, то из оценок (9.5) и (9.20) следует, что для любого $0 < \alpha \le 1$ справедлива оценка

$$\|h_{u,u_1}(x_1)\|_{\Psi_\phi} \le C_\alpha e^{(\alpha\Lambda_0 + \Lambda_0 - \beta)x_1}\|u^0 - u_1^0\|_{\Psi_b}^{\alpha}\|u^0 - u_1^0\|_{\Psi_\phi}, \tag{9.21}$$

где константа C_α зависит от $\|u_i^0\|_{\Psi_b}$, α и C_ϕ, но не зависит от конкретного вида ϕ. Зафиксировав теперь $\alpha := \beta\Lambda_0^{-1}$, получим, что функция h_{u,u_1} удовлетворяет условию (9.13). Применив оценку (9.15) к уравнению (9.19) и воспользовавшись неравенством (9.21), получим оценку (9.18). Остальные утверждения теоремы являются немедленными следствиями этой оценки. Теорема 9.2 доказана.

В заключение этого параграфа, мы построим аттрактор $\mathcal{A}_{sp}$ полугруппы (9.10) и докажем естественную формулу, связывающую этот аттрактор с аттрактором $\mathcal{A}$ исходного уравнения (0.1).

Теорема 9.3. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1. Тогда полугруппа* (9.10) *обладает локально-компактным аттрактором $\mathcal{A}_{sp}$ в фазовом пространстве Ψ_b (см. определение 2.1), который допускает следующее описание:*

$$\mathcal{A}_{sp} = \mathcal{K}\big|_{x_1=0}, \tag{9.22}$$

где $\mathcal{K}$ – множество всех ограниченных решений уравнения (0.1), *определенное в теореме 2.1. Таким образом, аттракторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{sp}$ связаны соотношением*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}\big|_{t=0}, \quad \mathcal{A}_{sp} = \mathcal{K}\big|_{x_1=0}. \tag{9.23}$$

Более того, аттрактор $\mathcal{A}_{sp}$ инвариантен относительно группы $\widetilde{T}_h$ 'пространственных' сдвигов:

$$\widetilde{T}_h\mathcal{A}_{sp} = \mathcal{A}_{sp}, \quad (\widetilde{T}_h)u^0(t,x') := u(t+h_1, x'+h'), \quad h \in \mathbb{R}^n. \tag{9.24}$$

Действительно, существование аттрактора $\mathcal{A}_{sp}$ выводится из диссипативной оценки (9.4) и внутренней сглаживающей оценки для параболической задачи (9.2) совершенно аналогично доказательству теоремы 2.1. Более того, так как *уравнения* (0.1) и (9.2) совпадают, то множества их ограниченных решений в $\mathbb{R}^{n+1}$ также совпадают, откуда и следуют формулы (9.22) и (9.23), а формула (9.24) является немедленным следствием инвариантности задачи (9.2) относительно группы $\{\widetilde{T}_h, h \in \mathbb{R}^n\}$.

Замечание 9.1. Метод построения вспомогательной пространственной динамической системы, аналогичный изложенному выше, использовался многими авторами для изучения *эллиптических* краевых задач в цилиндрических областях методами теории динамических систем (см. [2], [17], [29] и цитированную там литературу). Как показывают результаты данного параграфа, этот метод может может применятся и в случае параболических краевых задач.

§10 Пространственно-временной хаос в уравнениях реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$.

В этом параграфе мы построим сильно-неустойчивое многообразие для нулевого положения равновесия пространственной динамической системы (9.10), диффеоморфное пространству $\mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma$. Более того, аналогично §8, мы выведем из этого факта описание пространственно-временной динамики на аттракторе $\mathcal{A}$ исходного уравнения (0.1), соответствующей гиперплоскости $V_n := \mathrm{span}\{e_t, e_{x_2}, \cdots, e_{x_n}\}$. Мы начнем с формулировки аналога теоремы 8.1 для пространственной динамической системы (9.10).

Теорема 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1 и пусть, дополнительно,*

$$f(0) = 0, \quad [f'(0)]^* = f'(0) \quad \text{и} \quad \sigma(-f'(0) - \lambda_0, \mathbb{R}^k) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \neq \varnothing. \tag{10.1}$$

Тогда существуют положительные числа σ и ρ_0, вектор $e \in \mathbb{R}^k$, подпространство

$$\Psi_+ = \Psi_+(\sigma) := \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_\sigma \cdot e \tag{10.2}$$

и гладкое ($C^{1,\alpha}$-гладкое) отображение

$$(10.3)\qquad \bar{\mathbb{V}}_0 : B(\rho_0, 0, \Psi_+) \to \mathcal{A}_{sp}, \quad \text{такое что} \quad \widetilde{T}_h \circ \bar{\mathbb{V}}_0 = \bar{\mathbb{V}}_0 \circ \widetilde{T}_h, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

и

$$(10.4)\qquad \|\bar{\mathbb{V}}_0 v - v\|_{\Psi_b} \le C\|v\|^{1+\alpha}_{\Psi_b}, \quad \forall v \in B(\rho_0, 0, \Psi_+),$$

где $\alpha > 0$ определено в теореме 9.2. Более того, для любой весовой функции ϕ полиномиального роста, справедливы следующие оценки:

$$(10.5)\qquad C_1^{-1}\|v_1 - v_2\|_{\Psi_\phi} \le \|\bar{\mathbb{V}}_0(v_1) - \bar{\mathbb{V}}_0(v_2)\|_{\Psi_\phi} \le C_1\|v_1 - v_2\|_{\Psi_\phi},$$

для любых $v_1, v_2 \in B(\rho_0, 0, \Psi_+)$, причем константа C_1 зависит только от констант N и C_ϕ в неравенстве (7.2) и не зависит от конкретного вида весовой функции ϕ.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 7.1, мы хотим построить сильно-неустойчивое многообразие нулевого положения равновесия разрешающего оператора $S := \mathcal{S}_1 : \Psi_b \to \Psi_b$ уравнения (9.2) за единичное время. Для этого необходимо проверить условия теорем 6.1 и следствия 6.5 для оператора S. Действительно, в этом случае $\Phi := \Psi_b$, $S_0 := D_{u^0}\mathcal{S}_1(0)$, $\mathcal{B}(u) := S(u) - S_0(u)$, где $D_{u^0}\mathcal{S}_{x_1}(0)$ – разрешающий оператор для линейной параболической задачи:

$$(10.6)\qquad \partial_t v = a\Delta_x v - L\partial_{x_1} v - f'(0)v - \lambda_0 v, \quad v\big|_{x_1=0} = v^0, \quad e^{-\Lambda_0 x_1} v \in L^\infty(\Omega_{x_1}),$$

которая, согласно теореме 9.2, является линеаризацией задачи (9.2) вдоль нулевого решения. Тогда из теоремы 9.2 вытекает, что $\mathcal{B} \in C^{1,\alpha}(\Psi_b, \Psi_b)$, $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}'(0) = 0$, и справедлива следующая оценка:

$$(10.7)\qquad \|\mathcal{B}(u) - \mathcal{B}(u_1)\|_{\Psi_\phi} \le C(\|u\|^\alpha_{\Psi_b} + \|u_1\|^\alpha_{\Psi_b})\|u - u_1\|_{\Psi_\phi},$$

где $u, u_1 \in \Psi_b$, ϕ – произвольная весовая функция достаточно малого экспоненциального роста, а константа C зависит от Ψ_b-норм u, u_1 и C_ϕ, но не зависит от конкретного вида функции ϕ. Таким образом, нелинейная функция $\mathcal{B}(u)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 6.1 и следствия 6.5, и остается проверить условия на линейный оператор S_0. Для этого нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы 10.1. Тогда спектральный радиус оператора S_0 вычисляется по следующей формуле:*

$$(10.8)\qquad r_0(S_0) = \exp\Big(\frac{L - \sqrt{L^2 - 4a\max\sigma(-f'(0) - \lambda_0, \mathbb{R}^k)}}{2a}\Big).$$

В частности, существует собственный вектор $e \in \mathbb{R}^k$ оператора $-f'(0) - \lambda_0$, такой что

$$(10.9)\qquad r_0(S_0) = \exp\Big(\frac{L - \sqrt{L^2 - 4a\bar{\Lambda}_0}}{2a}\Big), \quad (-f'(0) - \lambda_0)e = \bar{\Lambda}_0 e.$$

Более того, если ϕ – весовая функция экспоненциального роста $\alpha > 0$, а $\widetilde{S}_0$ расширение оператора S_0 до непрерывного оператора в Ψ_ϕ, то справедлива оценка

$$r_0(\widetilde{S}_0, \Phi_\phi) \le r_0(S_0) + C\alpha, \tag{10.10}$$

где константа C не зависит от α, ϕ и C_ϕ.

Доказательство. Действительно, так как функция

$$u_{\bar\Lambda_0}(x_0) = e^{\Lambda(\bar\Lambda_0)x_1}e, \quad \Lambda(\bar\Lambda_0) := \frac{L - \sqrt{L^2 - 4a\bar\Lambda_0}}{2a} \tag{10.11}$$

удовлетворяет уравнению (10.6), если e – собственный вектор $-f'(0) - \lambda_0$, соответствующий собственному значению $\bar\Lambda_0$, и, согласно условию (9.3), $\Lambda(\bar\Lambda_0) \le L/(2a)$, то справедливо неравенство

$$r_0(S_0) \ge e^{\Lambda(\max\sigma(-f'(0)-\lambda_0,\mathbb{R}^k))}. \tag{10.12}$$

Для доказательства обратного неравенства заметим, что из самосопряженности оператора $f'(0)$ следует вещественность его спектра, а также неравенство

$$(-f'(0) - \lambda_0)v.v \le \bar\Lambda_0 v.v, \tag{10.13}$$

где $\bar\Lambda_0$ – максимальное собственное значение оператора $-f'(0) - \lambda_0$. Поэтому, аналогично доказательству теоремы 9.1, функция $w(t,x) := e^{-2\theta x_1}|v(t,x)|^2$, где $v(t,x)$ – произвольное решение уравнения (10.6), а $\theta \in \mathbb{R}$ – произвольное число, удовлетворяет неравенству

$$\partial_t w - a\Delta_x w + (L - 2a\theta)\partial_{x_1} w + 2(L\theta - a\theta^2 - \bar\Lambda_0)w \le 0, \quad w\big|_{x_1=0} = |v^0|^2. \tag{10.14}$$

Для того, чтобы применить принцип максимума к неравенству (10.14), необходимо чтобы $L\theta - a\theta^2 - \bar\Lambda_0 \ge 0$. Заметим, что $\theta = \Lambda(\bar\Lambda_0)$ является наименьшим значением θ, которое удовлетворяет этому условию. Поэтому, из принципа максимума следует априорная оценка

$$\|v(x_1)\|_{\Psi_b} \le e^{\Lambda(\bar\Lambda_0)x_1}\|v^0\|_{\Psi_b} \tag{10.15}$$

для решений $v(t,x)$ задачи (10.6), удовлетворяющих условию $e^{-\Lambda(\bar\Lambda_0)x_1}v \in L^\infty(\Omega_{x_1})$. Из априорной оценки (10.15) стандартным образом доказывается существование решения, принадлежащего этому классу (см., например, [5]) и, так как $\Lambda(\bar\Lambda_0) \le L/(2a)$, то из предложения 9.1 следует равенство $D_{u^0}\mathcal{S}_{x_1}(0)v^0 = v(x_1)$. Остается заметить, что из оценки (10.15) следует неравенство, обратное (10.12). Таким образом, формула (10.8) доказана. Как и в лемме 7.1, формула (10.9) является немедленным следствием (10.8), а оценка (10.10) доказывается так же, как и в лемме 7.2. Лемма 10.1 доказана.

Таким образом, из (10.1) и (10.8) следует, что $r_0(S_0) > 1$. Условие (6.2) проверено.

Следующая лемма является аналогом леммы 7.3 для случая пространственной динамической системы (9.10).

Лемма 10.2. *Существуют $\theta_0 > 1$, удовлетворяющее условию (6.6), $\sigma > 0$ и инвариантное (относительно S_0 и $\widetilde{T}_h$) подпространство Ψ_+, определенное формулой (10.2), где вектор e удовлетворяет (10.9), такие что сужение S_+ оператора S_0 на инвариантное подпространство Ψ_+ является обратимым и удовлетворяет условию (6.5). Более того, для любого $N > 0$ существует $\varepsilon_N > 0$, такое что*

$$\|S_+^{-l}v_+\|_{\Psi_{\psi_{\varepsilon,N,x_0}}} \le C\theta_0^{-l}\|v_+\|_{\Psi_{\phi_{\varepsilon,N,x_0}}}, \quad \forall v_+ \in \Psi_+, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{10.16}$$

где $\psi_{\varepsilon,N,x_0}(x) := (1+\varepsilon|x-x_0|)^{-N}$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_N$, а константа C не зависит от N, $\varepsilon \le \varepsilon_N$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство леммы 10.2 проводится совершенно аналогично доказательству леммы 7.3, только формулу (7.21) нужно заменить следующей очевидной формулой:

$$\widehat{S_0^l v_+}(\xi) = \exp\left(l\frac{L - \sqrt{L^2 + 4a^2|\xi'|^2 - 4a\bar{\Lambda}_0 + 4ia\xi_1}}{2a}\right)\widehat{v}_+(\xi)e, \quad v_+ \in \Psi_+, \ l \in \mathbb{Z}, \tag{10.17}$$

для доказательства которой достаточно применить (t,x')-преобразование Фурье к уравнению (10.6) и воспользоваться тем, что e – собственный вектор оператора $-f'(0) - \lambda_0$ с собственным значением $\bar{\Lambda}_0$. Заметим также, что, согласно (10.8)

$$\Sigma(0) = r_0(S_0) > 1, \quad \text{где} \quad \Sigma(\xi) := \exp\left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4a^2|\xi'|^2 - 4a\bar{\Lambda}_0 + 4ia\xi_1}}{2a}\right). \tag{10.18}$$

Поэтому, аналогично доказательству леммы 7.3, из (10.17) и (10.18) следует, что при достаточно малом $\sigma > 0$ справедлива оценка (10.16) (для некоторого θ_0, удовлетворяющего условию (6.6)), что доказывает лемму 10.2. Более того, утверждение теоремы 10.1 выводится из лемм 10.1-10.2 так же, как это было сделано в доказательстве теоремы 7.1. Теорема 10.1 доказана.

Замечание 10.1. Техническое условие самосопряженности матрицы $f'(0)$ было введено для того, чтобы обеспечить вещественность 'максимально-неустойчивого' собственного значения $\bar{\Lambda}_0$ матрицы $-f'(0) - \lambda_0$. Действительно, если $\operatorname{Im}\bar{\Lambda}_0 \ne 0$, то 'максимальная неустойчивость' в уравнении (10.6) достигается уже не на пространственно-однородном решении вида $u(x_1) := r_0(S_0)^{x_1}e$ (как в лемме 10.1), но на пространственно-периодическом решении вида $u(x_1,t) = r_0(S_0)^{x_1}e^{i\operatorname{Im}\bar{\Lambda}_0 t}e$. В этом случае, пространство $\mathbb{B}_\sigma$ в формуле (10.2) необходимо заменить более сложным пространством $\mathbb{B}_{\sigma,\operatorname{Im}\bar{\Lambda}_0}$, состоящим из функций, носитель преобразования Фурье которых лежит в сдвинутом кубе $\operatorname{Im}\bar{\Lambda}_0 + [-\sigma,\sigma]^n$, что приводит к более громоздким формулам (не меняющим, однако, общую схему изложения, см. [43-44]).

Сформулируем теперь аналоги следствий 7.1–7.3 для пространственной динамической системы (9.10).

Следствие 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы 10.1. Тогда ε-энтропия ее аттрактора $\mathcal{A}_{sp}$ допускает следующую оценку снизу:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_{sp}\big|_{B_0^R}, L^\infty(B_0^R)) \ge C_1 R^n \ln_+ \frac{R_0'}{\varepsilon}, \tag{10.19}$$

где константы C и R_0' не зависят от $R \geq 1$ и $\varepsilon > 0$. В частности, пространственная (обобщенная) топологическая энтропия действия группы $\widetilde{T}_h$ на аттракторе $\mathcal{A}_{sp}$ строго положительна:

$$h_{sp}(\mathcal{A}_{sp}, \widetilde{T}_h) \geq C_1 > 0. \tag{10.20}$$

Вывод формул (10.19) и (10.20) дословно повторяет доказательство следствий 7.1 и 7.2 и поэтому не приводится.

Следствие 10.2. *Пусть выполнены условия теоремы 10.1. Тогда существует отображение*

$$\bar{\mathbb{V}} : \mathcal{B}(\sigma) \to \mathcal{A}_{sp}, \quad \mathcal{B}(\sigma) := B(1, 0, \mathbb{B}_\sigma^{\mathrm{Re}}), \tag{10.21}$$

коммутирующее с группой $\{\widetilde{T}_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ 'пространственных' сдвигов и удовлетворяющее оценке

$$C_1^{-1} \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \leq \|\bar{\mathbb{V}}(v_1) - \bar{\mathbb{V}}(v_2)\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)}, \tag{10.22}$$

для любых $v_1, v_2 \in \mathcal{B}(\sigma)$, причем константа C_1 зависит только от констант N и C_ϕ в неравенстве (7.3) и не зависит от конкретного вида весовой функции ϕ полиномиального роста.

Действительно, искомое отображение задается формулой $\bar{\mathbb{V}}(v) := \bar{\mathbb{V}}_0(\rho^{-1} v \cdot e)$, где $\bar{\mathbb{V}}_0$ – отображение построенное в теореме 10.1.

Следующая теорема переформулирует полученные результаты в терминах исходной динамической системы, порожденной уравнением (0.1).

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия теоремы 10.1. Тогда обобщенная топологическая энтропия действия многопараметрической полугруппы (1.6) на аттракторе $\mathcal{A}$ уравнения (0.1), соответствующая гиперплоскости $V_n := \mathrm{span}\{e_t, e_{x_2}, \cdots, e_{x_n}\}$, строго положительна*

$$\widehat{h}^1_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_n}_{(t,h)}) \geq C_2 > 0. \tag{10.23}$$

В частности,

$$\widehat{h}^n_{top}(\mathcal{A}, S_t) \geq C_3 > 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad h_{top}(\mathcal{A}, S_t) = \infty. \tag{10.24}$$

Более того, существуют положительное число $\sigma > 0$ и гомеоморфное (в локальной топологии) вложение $\mathbb{W} : \mathcal{B}(\sigma) \to \mathcal{A}$, такие что

$$S_t \circ \mathbb{W} = \mathbb{W} \circ T_{te_{x_1}}, \quad t \geq 0, \quad T_{he_{x_i}} \circ \mathbb{W} = \mathbb{W} \circ T_{he_{x_i}}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad i = 2, \cdots, n. \tag{10.25}$$

Доказательство. Согласно оценке (10.20) и предложению 4.3,

$$\widehat{h}^1(\mathcal{K}, \mathbb{T}^{V_n}_{(s,h)}) \geq C \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}_{sp}, \widetilde{T}_h) \geq CC_1 > 0.$$

Применив предложение 4.3 еще раз, получим требуемую оценку (4.24) (здесь мы неявно воспользовались тем, что множества $\mathcal{K}$ всех ограниченных решений уравнений (0.1) и (9.2) совпадают). Оценки (10.24) являются немедленными следствиями (10.23) и теоремы 4.1. Таким образом, остается построить вложение $\mathbb{W}$, удовлетворяющее условиям (10.25). Для этого мы воспользуемся вложением (10.21), построенном в следствии 10.2. Напомним, прежде всего, что, по построению, образ $\bar{\mathbb{V}}(\mathcal{B}(\sigma))$ лежит на сильно-неустойчивом многообразии $\mathcal{V}_0$ нулевого положения равновесия пространственной динамической системы (9.10). Для любого $v_0 \in \mathcal{V}_0$, обозначим через $(\Pi_{x_1=0})^{-1}v_0 \in \mathcal{K}$ полную траекторию полугруппы (9.10) проходящую через v_0, то есть

$$\left((\Pi_{x_1=0})^{-1}v_0\right)(t,x) := \begin{cases} S_{x_1}v_0, & \text{при } x_1 \geq 0, \\ S_{x_1-[x_1]}\bar{\mathbb{V}}_{[x_1]}((\bar{\mathbb{V}}_0)^{-1}(v_0)), & \text{при } x_1 < 0, \end{cases} \tag{10.26}$$

где отображения $\bar{\mathbb{V}}_0$ и $\bar{\mathbb{V}}_n$, $n \in \mathbb{Z}_-$ построены в теоремах 10.1 и 6.1 соответственно. Тогда, согласно оценкам (6.34), (9.11), (9.15), (10.5) и (10.16), для любой весовой функции степенного роста и любых $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_0$, справедлива оценка

$$\|\Pi_{x_1=0}^{-1}v_1 - \Pi_{x_1=0}^{-1}v_2\|_{L^\infty_{e^{-\Lambda_0|x_1|}}(\mathbb{R},\Psi_\phi)} \leq C\|v_1 - v_2\|_{\Psi_\phi}, \quad \Lambda_0 := L/(2a).$$

Поэтому, отображение $\Pi_{x_1=0}^{-1}$ осуществляет гомеоморфное (в локальной топологии) вложение множества $\mathcal{V}_0$ в пространство $\mathcal{K}$.

С другой стороны, согласно теореме 5.1, отображение $\Pi_{t=0}$ осуществляет гомеоморфизм множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ (действительно, согласно этой теореме, $\Pi_{t=0}$ взаимнооднозначно, а непрерывное взаимно-однозначное отображение компактов является гомеоморфизмом).

Таким образом, искомое отображение $\mathbb{W}$ можно определить по следующей формуле:

$$\mathbb{W}(v) := \Pi_{t=0} \circ (\Pi_{x_1=0})^{-1} \circ \bar{\mathbb{V}}(v), \quad v \in \mathcal{B}(\sigma). \tag{10.27}$$

Справедливость коммутационных соотношений (10.25) немедленно следует из определения (10.27) оператора $\mathbb{W}$. Теорема 10.2 доказана.

Итак, гомеоморфное вложение модельной динамики $(\mathcal{B}(\sigma), T_h)$ в пространственно-временную динамическую систему $(\mathcal{A}, \mathbb{S}^{V_n}_{(t,h)})$, порожденную уравнением (0.1) и гиперплоскостью $V_n := \operatorname{span}\{e_t, e_{x_2}, \cdots, e_{x_n}\}$, построено. В заключение этого параграфа, мы сформулируем несколько следствий из этого вложения, аналогичных результатам §8.

Следствие 10.3. *Пусть выполнены условия теоремы 10.1. Тогда существуют положительные числа σ и ρ и гомеоморфное вложение*

$$\tau : \mathcal{M}_n \to \mathcal{A}, \tag{10.28}$$

где $\mathcal{M}_n := [-1,1]^{\mathbb{Z}^n}$ (см. определение 8.1), такие что

$$S_{\rho l} \circ \tau = \tau \circ \mathcal{T}_{le_{x_1}}, \quad T_{\rho l e_{x_i}} \circ \tau = \tau \circ \mathcal{T}_{le_{x_i}}, \quad i = 2, \cdots, n, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{10.29}$$

Действительно, искомое отображение τ задается формулой $\tau = \mathbb{W} \circ \mathbb{U}$, где отображения $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ определены в теоремах 8.1 и 10.2 соответственно.

Следствие 10.4. *Пусть выполнены условия теоремы 10.1, пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ – произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$ и пусть F_i, $i = 1, \cdots, n$, – набор попарно-коммутирующих гомеоморфизмов компакта K, то есть*

$$F_i : K \to K, \quad i = 1, \cdots n, \quad F_i \circ F_j = F_j \circ F_i, \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{10.30}$$

Тогда существует гомеоморфное вложение $\widetilde{\tau}_K : K \to \mathcal{A}$ и положительное число σ_N, зависящее только от N, такие что

$$S_{\sigma_N} \circ \widetilde{\tau}_K = \widetilde{\tau}_K \circ F_1, \quad T_{\sigma_N e_{x_i}} \circ \widetilde{\tau}_K = \widetilde{\tau}_K \circ F_i, \quad i = 2, \cdots n, \tag{10.31}$$

где через e_{x_i} обозначен i-тый координатный вектор в $\mathbb{R}^n$.

Действительно, согласно следствию 10.3, достаточно построить вложение конечномерной динамики, порожденной гомеоморфизмами F_i в модельную динамическую систему $(\mathcal{M}_n, \mathcal{T}_l)$, а такое вложение было фактически построено в доказательстве следствия 8.3.

Следующий результат показывает, что, в многомерном случае $n > 1$, условие конечномерности множества K можно убрать, если ограничится рассмотрением только временной части динамики.

Следствие 10.5. *Пусть выполнены условия теоремы 10.1, $n > 1$, K – произвольный метрический компакт и $F : K \to K$ произвольный его гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфное вложение $\tau_K : K \to \mathcal{A}$, такое что*

$$S_{\tau l} \circ \tau_K = \tau_K \circ F, \tag{10.32}$$

где константа $\rho > 0$ – такая же, как и в следствии 10.3.

Доказательство. Действительно, как и в следствии 10.4, достаточно построить искомое вложение в модельную динамическую систему $(\mathcal{M}_n, \mathcal{T}_{le_{x_1}})$. Заметим теперь, что многомерная схема Бернулли $\mathcal{M}_n := [-1, 1]^{\mathbb{Z}^n}$ может быть интерпретирована как одномерная схема Бернулли с пространством символов $[-1, 1]^{\mathbb{Z}^{n-1}}$, то есть

$$\mathcal{M}_n = ([-1, 1]^{\mathbb{Z}^{n-1}})^{\mathbb{Z}}, \tag{10.33}$$

С другой стороны, согласно теореме Урысона, всякий метрический компакт гомеоморфно вкладывается в $[-1, 1]^{\mathbb{Z}}$, а значит и в $[-1, 1]^{\mathbb{Z}^{n-1}}$ (так как $n > 1$). Искомое вложение K в схему Бернулли (10.33) строится после этого при помощи стандартной конструкции, изложенной в доказательстве следствия 8.3. Следствие 10.5 доказано.

Замечание 10.2. Следствие 10.5 показывает, что (при выполнении условий теоремы 10.1), в многомерном случае $n > 1$, не существует разумных топологических инвариантов для временной динамики, порождаемой уравнением (0.1) на аттракторе $\mathcal{A}$. В одномерном случае, напротив, такие инварианты существуют. Например, в качестве такого инварианта можно взять инфинум $\widehat{h}^1_{top}((\mathcal{A}, d), S_t)$ по всем метрикам, задающим локальную топологию на аттракторе, аналогично формуле (5.22). Более того, согласно формуле (8.16) и вложению (10.25), этот инвариант будет конечным и строго положительным в условиях теоремы 10.1. Заметим также, что попытка построить аналогичный инвариант в многомерном случае, например, по формуле

$$\inf_d \widehat{h}^n_{top}((\mathcal{A}, d), S_t),$$

очевидно, приводит к тождественно нулевому инварианту.

§11. Формально-градиентные системы уравнений реакции-диффузии и их топологическая энтропия.

В этом параграфе мы рассмотрим частный случай уравнения (0.1), когда нелинейная функция f является градиентом некоторой скалярной функции F:

$$f(v) = \nabla_v F(v), \quad F \in C^3(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}). \tag{11.1}$$

Напомним, что, в случае уравнения (0.1) в ограниченной области Ω и нулевого векторного поля $\vec{L}$, условие (11.1) влечет наличие у задачи (0.1) глобальной функции Ляпунова следующего вида:

$$\mathcal{L}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega a\nabla_x u.\nabla_x u + 2F(u) + \lambda_0 u.u\,dx. \tag{11.2}$$

В частности, из наличия функции Ляпунова следует, что топологическая энтропия действия полугруппы S_t на аттракторе равна нулю:

$$h_{top}(\mathcal{A}, S_t) = 0. \tag{11.3}$$

В случае же неограниченной области $\Omega = \mathbb{R}^n$, выражение (11.2) оказывается равным бесконечности для большинства $u \in \mathcal{A}$ и не позволяет, таким образом, корректно определить функцию Ляпунова на аттракторе (следуя [27] и [37], мы называем такие системы *формально-градиентными*). Однако, несмотря на отсутствие глобальной функции Ляпунова, наличие градиентной структуры (11.1) все-же приводит к весьма существенному упрощению пространственно-временной динамики, порождаемой уравнением (0.1) (см., например, [22], [27] и [37] по поводу более детального исследования формально-градиентных систем в малых размерностях $n = 1$ и $n = 2$).

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема, которая дает естественный аналог равенства (11.3) для случая формально-градиентной системы в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 11.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и пусть, дополнительно, справедливо условие* (11.1). *Тогда действие расширенной* $(n+1)$*-параметрической полугруппы* (1.6) *на аттракторе имеет нулевую топологическую энтропию:*

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = 0. \tag{11.4}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что векторное поле $\vec{L}$, входящее в уравнение (0.1) может быть приведено к виду $\vec{L} := (L, 0, \cdots, 0)$ при помощи подходящей ортогональной замены x-координаты. Более того, используя стандартную (для теории бегущих волн) замену (t, x)-координат

$$(t, x) = \mathbb{A}(t', x'), \quad t = t' - Lx_1, \quad x = x', \tag{11.5}$$

можно свести общий случай уравнения (0.1) к частному случаю $\vec{L} = 0$. Действительно, множество $\mathcal{K}$ всех ограниченных траекторий (0.1), очевидно, не изменяется при вышеописанной замене координат, более того детерминант этой замены равен единице, поэтому, согласно следствию 3.3,

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = h_{top}(\mathcal{K}, \mathbb{T}_{(t,h)}) = h_{top}(\mathcal{K}, \mathbb{T}_{\mathbb{A}(t',x')}) = h_{top}(\mathcal{A}', \mathbb{S}_{(t',x')})$$

(здесь мы также воспользовались тем фактом, что отображение $\Pi_{t=0} : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ является гомеоморфизмом (см. теорему 5.1 и доказательство теоремы 10.2), а топологическая энтропия является топологическим инвариантом). Таким образом, топологическая энтропия действительно сохраняется при преобразованиях вида (11.5) и, следовательно, достаточно доказать теорему 11.1 лишь для случая $\vec{L} = 0$. Для этого мы рассмотрим пространство $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ всех борелевских вероятностных мер на аттракторе $\mathcal{A}$, которые инвариантны относительно группы $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ пространственных сдвигов (это пространство, очевидно, не пусто, так как аттрактор $\mathcal{A}$ компактен в локальной топологии пространства Φ_{loc}) и определим действие полугруппы S_t^*, порожденной уравнением (0.1), в пространстве $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ следующим стандартным образом:

$$S_t^* : \mathbb{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{M}(\mathcal{A}), \quad (S_t^* \mu)(B) := \mu\left(S_t^{-1} B\right), \quad B \subset \mathcal{A}. \tag{11.6}$$

Как показывает следующая лемма, полугруппа (11.6) обладает 'настоящей' функцией Ляпунова (в отличие от исходной полугруппы S_t на аттракторе, где имеется лишь формальная функция Ляпунова).

Лемма 11.1. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1 и пусть $\vec{L} = 0$. Тогда полугруппа* (11.6) *допускает глобальную функцию Ляпунова следующего вида:*

$$\mathcal{L}(\mu) = \int_{u_0 \in \mathcal{A}} [a \nabla_x u_0(x_0) . \nabla_x u_0(x_0) + \lambda_0 u_0(x_0) . u_0(x_0) + 2F(u_0(x_0))] \mu(du). \tag{11.7}$$

В частности, $\mathcal{L}(\mu)$ не зависит от выбора точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что локальные топологии, порождаемые на аттракторе $\mathcal{A}$ вложениями $\mathcal{A} \subset \Phi_{loc}$ и $\mathcal{A} \subset C^{4-\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$, совпадают. Действительно, согласно теореме 5.1, эволюционный оператор S_t осуществляет гомеоморфизм аттрактора $\mathcal{A}$, наделенного топологией пространства Φ_{loc}. С другой стороны, согласно следствию 1.1,

$$S_t : (\mathcal{A}, \Phi_{loc}) \to (\mathcal{A}, C^{4-\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)), \tag{11.8}$$

при любом $\delta > 0$ и $t \geq 1$. Отсюда, в частности следует, что S_{-t} – непрерывный оператор из $(\mathcal{A}, C^{4-\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n))$ в $(\mathcal{A}, \Phi_{loc})$. Более того, так как, согласно теореме 2.1, $\mathcal{A}$ ограничен в $C^{4-\delta}_b(\mathbb{R}^n)$ при любом $\delta > 0$, то $\mathcal{A}$ – компакт в $C^{4-\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, отображение (11.8) является гомеоморфизмом при любых $\delta > 0$ и $t \geq 1$. Представив теперь тождественное отображение $\mathrm{Id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ в виде композиции $\mathrm{Id} = S_t \circ S_{-t}$, получаем, что Id – гомеоморфизм между $(\mathcal{A}, \Phi_{loc})$ и $(\mathcal{A}, C^{4-\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n))$, а значит, вышеупомянутые топологии действительно совпадают. Поэтому, функции

$$u_0 \to \partial^2_{x_i x_j} u_0(x_0), \;\; u_0 \to F(u_0(x_0)), \quad u_0 \to \partial_t \partial_{x_i} u_0(x_0) \tag{11.9}$$

являются непрерывными функциями на аттракторе $(\mathcal{A}, \Phi_{loc})$ (здесь и далее под $\partial_t u_0$, $u_0 \in \mathcal{A}$, понимается результат подстановки u_0 в левую часть уравнения (0.1)). Так как мера μ предполагается борелевской, то из непрерывности функций (11.9) вытекает корректность определения функции (11.7). Более того, так как мера $\mu \in \mathbb{M}(\mathcal{A})$ инвариантна относительно пространственных сдвигов, то выражение (11.7) не зависит от $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, остается доказать, что (11.7) – функция Ляпунова.

Действительно, пусть μ – произвольная мера из $\mathbb{M}(\mathcal{A})$. Тогда из (11.6) и (11.7) следует формула

$$\begin{aligned}(11.10)\quad \mathcal{L}(t) := \mathcal{L}(S_t^*\mu) = \int_{u_0\in\mathcal{A}} [a\nabla_x u(t,x_0).\nabla_x u(t,x_0)+ \\ + \lambda_0 u(t,x_0).u(t,x_0) + 2F(u(t,x_0))]\mu(du_0),\end{aligned}$$

где $u(t,x_0) := (S_t u_0)(x_0)$. Продифференцировав это выражение по t и выразив $\partial_t u$ из уравнения (0.1), получим

$$\begin{aligned}(11.11)\quad \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = -2\int_{u_0\in\mathcal{A}} [\partial_t u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)]\mu(du_0)+ \\ + 2a\sum_{i=1}^{n}\int_{u_0\in\mathcal{A}} \partial_{x_i}[\partial_{x_i}u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)]\mu(du_0)\end{aligned}$$

(возможность перестановки дифференцирования по t и интегрирования по мере μ следует из непрерывности функций (11.9)). Докажем что второе слагаемое в (11.11) равно нулю. Действительно, так как мера μ инвариантна относительно пространственных сдвигов, то

$$\begin{aligned}&\int_{u_0\in\mathcal{A}} \partial_{x_i}[\partial_{x_i}u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)]\mu(du_0) = \\ &\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{u_0\in\mathcal{A}}[\partial_{x_i}u(t,x_0+he_i).\partial_t u(t,x_0+he_i) - \partial_{x_i}u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)]\mu(du_0) \\ &= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big\{\int_{u_0\in\mathcal{A}}\partial_{x_i}u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)\mu(du_0) - \\ &\int_{u_0\in\mathcal{A}}\partial_{x_i}u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)\mu(du_0)\Big\} = 0.\end{aligned}$$

Проинтегрировав теперь (11.11) по t, получим

$$(11.12)\qquad \mathcal{L}(S_{t_2}^*\mu) - \mathcal{L}(S_{t_1}^*\mu) = -2\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_0\in\mathcal{A}}|\partial_t u(t,x_0)|^2\mu(du_0) \le 0.$$

Таким образом, (11.7) не убывает вдоль траекторий полугруппы (11.6). Предположим теперь, что

$$(11.13)\qquad \mathcal{L}(S_{t_1}^*\mu) = \mathcal{L}(S_{t_2}^*\mu),$$

для некоторых $\mu \in \mathbb{M}(\mathcal{A})$ и $t_2 > t_1$. Докажем, что носитель меры μ должен быть подмножеством множества $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ положений равновесия уравнения (0.1):

$$\operatorname{supp} \mu \subset \mathcal{R}. \tag{11.14}$$

Действительно, из пространственной инвариантности меры μ и выражения (11.12) следует, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{u_0 \in \mathcal{A}} |\partial_t u(t,x)|^2 \mu(du_0)\, dt = 0, \tag{11.15}$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, для μ-почти всех $u_0 \in \mathcal{A}$, имеет место равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} |\partial_t u(t,x)|^2\, dt = 0, \quad \text{для любых} \quad x \in \mathbb{Q}^n. \tag{11.16}$$

Так как функция $t \to \partial_t u(t,x)$ непрерывна для любого $u \in \mathcal{K}$ (согласно следствию 1.3), то из (11.16) следует, что для μ-почти всех $u_0 \in \mathcal{A}$, справедливо равенство $\partial_t u(t,x) \equiv 0$, для всех $t \in [t_1, t_2]$ и всех $x \in \mathbb{Q}^n$. Так как функция $x \to \partial_t u(t,x)$ также непрерывна, то отсюда следует равенство $\partial_t u(t,x) \equiv 0$, для всех $(t,x) \in [t_1,t_2] \times \mathbb{R}^n$ и, следовательно, $u_0 \in \mathcal{R}$. Таким образом, мы доказали равенство

$$\mu(\mathcal{R}) = 1, \tag{11.17}$$

из которого и следует вложение (11.14). Остается заметить, что любая мера, удовлетворяющая (11.14) является положением равновесия системы (11.6). Лемма 11.1 доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 11.1. Предположим, что μ – произвольная борелевская вероятностная мера, инвариантная относительно действия расширенной полугруппы (1.6), порожденной уравнением (0.1). Тогда, очевидно, μ – положение равновесия системы (11.6) и, согласно лемме 11.1, справедливо вложение (11.14). Таким образом, метрическая энтропия $h_\mu(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)})$ действия полугруппы (1.6) (см., например, [6], [34] и [38] по поводу ее строгого определения) на аттракторе, соответствующая инвариантной мере μ, равна нулю

$$h_\mu(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = 0. \tag{11.18}$$

Так как равенство (11.18) справедливо для любой $\mathbb{S}_{(t,h)}$-инвариантной меры μ, то, согласно вариационному принципу,

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = \sup_\mu h_\mu(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = 0$$

(см., например, [34] и [38]). Теорема 11.1 доказана.

Замечание 11.1. Существование глобальной функции Ляпунова для полугруппы, порождаемой формально-градиентной системой на множестве пространственно-инвариантных мер было доказано в [37] для случая малых размерностей $n = 1$ и $n = 2$. Однако, при построении этой функции Ляпунова, использовались некоторые специфические факты, не имеющие аналога в размерности $n > 2$.

Замечание 11.2. Заметим, что топологическая энтропия $h_{top}(\mathcal{A}, S_t)$ однопараметрической полугруппы S_t, соответствующей уравнению (0.1), не обязательно равна нулю в условиях теоремы 11.1. Действительно, рассмотрим следующее скалярное уравнение Chafee-Infante, возмущенное достаточно большим транспортным членом:

$$\partial_t u = \Delta_x u - L\partial_{x_1} u + u - u^3, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{11.19}$$

Тогда, при $L > 2$, уравнение (11.19), очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 10.2 и, следовательно,

$$\widehat{h}^n_{top}(\mathcal{A}, S_t) \geq C > 0 \quad \text{и} \quad h_{top}(\mathcal{A}, S_t) = \infty.$$

С другой стороны, условие (11.1) также выполнено, так как уравнение (11.19) скалярное, поэтому

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = 0.$$

Литература

1. А.В. Бабин и М.И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, М.: Наука, 1989.
2. М.И. Вишик и С.В. Зелик, *Регулярный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области*, Мат. Сборник **190** (1999), no. 6, 23–58.
3. С.В. Зелик, *Аттрактор нелинейной системы уравнений реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$ и оценки его ε-энтропии*, Мат. Заметки **65 (6)** (1999), 941–943.
4. С.В. Зелик, *Аттрактор квазилинейного гиперболического уравнения с диссипацией в $\mathbb{R}^n$: размерность и ε-энтропия*, Мат. Заметки **67** (2000), no. 2, 304–307.
5. О.А. Ладыженская, В.А. Солонников и Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967.
6. А.Б. Каток и Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, М.: Факториал, 1999.
7. А.Н. Колмогоров и В.М. Тихомиров, *ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах*, УМН **14** (1959), no. 2(86), 3–86.
8. А. Мильке и С.В. Зелик, *Бесконечномерные траекторные аттракторы эллиптических краевых задач в цилиндрических областях*, УМН **57** (2002), no. 4, 119–151.
9. В.В Чепыжов и М.И. Вишик, *Колмогоровская ε-энтропия аттракторов уравнений реакции-диффузии*, Мат. Сборник **189(2)** (1998), 81–110.
10. F. Abergel, *Existence and Finite Dimensionality of the Global Attractor for Evolution Equations on Unbounded Domains*, J. Diff. Equ. **83** (1990), 85–108.
11. V. Afromovich, A. Babin, and S. Chow, *Spatial Chaotic Structure of Attractors of Reaction-Diffusion Systems*, Trans. Amer. Math. Soc **348** (1996), no. 12, 5031–5063.
12. V. Afraimovich, A. Babin, S.-N. Chow, *Infinitely Spatially Complex Solutions of PDE and Their Homotopy Complexity*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001,), no. 2, 281–339.
13. S. Agmon, L. Nirenberg, *Lower Bounds and Uniqueness Theorems for Solutions of Differential Equations in a Hilbert Space*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 207–229.
14. A. Babin and M. Vishik, *Attractors of Partial Differential Evolution Equations in an Unbounded Domain*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **116** (1990), no. 3-4, 221–243.
15. R. Boas, *Entire Functions*, New York Press, 1954.

16. L. Bunimovich and Ya. Sinai, *Spacetime Chaos in Coupled Map Lattices*, Nonlinearity **1** (1988), 491–516.
17. À. Calsina, X. Mora and J. Solà–Morales, *The Dynamical Approach to Elliptic Problems in Cylindrical Domains, and a Study of Their Parabolic Singular Limit*, J. Diff. Eqns. **102** (1993), 244–304.
18. V. Chepyzhov and M. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, AMS, Providence, RI, 2002.
19. P. Collet, J. Eckmann, *Extensive Properties of the Complex Ginzburg-Landau equation*, Communication in Mathematical Physics **200** (1999), 699–722.
20. P. Collet and J. Eckmann, *The Definition and Measurement of the Topological Entropy per Unit Volume in Parabolic PDE*, Nonlinearity **12** (1999), 451–473.
21. P. Collet and J. Eckmann, *Topological Entropy and ε-entropy for Damped Hyperbolic Equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré **1** (2000), no. 4, 715–752.
22. J. Eckmann and J. Rougemont, *Coarsening by Ginzburg-Landau Dynamics*, Comm. Math. Phys. **199** (1999), 441–470.
23. M. Efendiev and S. Zelik, *The Attractor for a Nonlinear Reaction-Diffusion System in an Unbounded Domain*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), no. 6, 625–688.
24. M.Efendiev and S.Zelik, *Upper and Lower Bounds for the Kolmogorov Entropy of the Attractor for an RDE in an Unbounded Domain*, JDDE **14** (2002), no. 2, 369–403.
25. E. Feireisl, *Bounded Locally Compact Global Attractors For Semilinear Damped Wave Equations on* $\mathbb{R}^n$, Differential and Integral Equations **9(5)** (1996), 1147–1156.
26. B. Fiedler and C. Rocha, *Orbit equivalence of global attractors of semilinear parabolic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 1, 257–284.
27. Th. Gallay and S. Slijepčević, *Energy Flow in Formally Gradient Partial Differential Equations in Unbounded Domains*, JDDE **13** (2001), no. 4, 757–789.
28. J. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Math. Surveys and Mon., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987).
29. K. Kirchgässner, *Wave Solutions of Reversible Systems and Applications*, J. Diff. Eqns. **45** (1982), 113–127.
30. O. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups of Evolution Equations*, Cambridge University Press, 1991.
31. E. Lindednstraus and B. Weiss, *Mean Topological Dimension*, Israel J. Math. **115** (2000), 1–24.
32. A. Mielke and G. Schneider, *Attractors for Modulation Equations on Unbounded Domains – Existence and Comparison*, Nonlinearity **8** (1995), 743–768.
33. A. Mielke and S. Zelik, *Attractors of Reaction-Diffusion Systems in* $\mathbb{R}^n$ *with Strictly Positive Spatio-Temporal Topological Entropy*, in preparation.
34. J. Moulin-Ollagnier and D. Pinchon, *The Variational Principle*, Studia Math. **72** (1982), no. 2, 151–159.
35. Ya. Pesin and Ya.Sinaĭ, *Space-time chaos in chains of weakly interacting hyperbolic mappings*, in: Adv. Soviet Math. **3**: Dynamical systems and statistical mechanics (Moscow, 1991).
36. D. Ruelle, *Turbulence, strange attractors, and chaos*, World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, 16. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.
37. S. Slijepčević, *Extended Gradient Systems: Dimension One*, DCDS **6** (2000), no. 3, 503–518.
38. A. Tagi-Zade, *A variational characterization of the topological entropy of continuous groups of transformations. The case of* $\mathbb{R}^n$*-actions*, Math. Notes **49** (1991), no. 3-4, 305–311.
39. R. Temam, *Infinite–dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer–Verlag, New-York, 1988.
40. H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Space, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.
41. S. Zelik, *The Attractor for a Nonlinear Reaction-Diffusion System in an Unbounded Domain and Kolmogorov's Epsilon-Entropy*, Math. Nachr. **232** (2001), no. 1, 129–179.
42. S. Zelik, *The Attractor for a Nonlinear Hyperbolic Equation in an Unbounded Domain*, Disc. Cont. Dyn Sys. Ser. A **7** (2001), no. 3, 593–641.

43. S. Zelik, *The Attractors of Reaction Diffusion Systems in Unbounded Domains And Their Spatial Complexity*, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), no. 5, 584–637.
44. S. Zelik, *Spatial and dynamical Chaos Generated by Reaction Diffusion Systems in Unbounded Domains*, DANSE, FU-Berlin, Preprint 38/00 (2000), 1–60.