ТРАЕКТОРНЫЙ АТТРАКТОР НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Вишик М.И. & Зелик С.В.

Содержание

Введение.

В полуцилиндре $\Omega_+ = \mathbb{R}_+ \times \omega$, где ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей, рассматривается следующая эллиптическая система:

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u,t) = g(t) \\ u|_{t=0} = u_0 \ ; \ u|_{\partial\omega} = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1, \cdots, u_k)$, $g = g(t,x)$, $f(u,t)$ – векторные функции, $(t,x) \in \Omega_+$, Δ – оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, \cdots, x_n)$, γ и a – постоянные матрицы $(\gamma, a \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k))$, причем $a = a^* > 0$. Условия на нелинейную функцию $f(u,t)$, правую часть g и начальное условие u_0 сформулированы в следующем параграфе.

Под решением задачи (0.1) понимается функция u, принадлежащая пространству $[H_{2,p}(\Omega_t)]^k$, $\forall t > 0$, где $\Omega_t = [t, t+1] \times \omega$, обладающая конечной

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ.

нормой

$$||u||_a = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} ||u, \Omega_t||_{H_{2,p}} < \infty \tag{0.2}$$

(Здесь и далее через $H_{l,p}$ обозначается соболевское пространство функций, обобщенные производные которых до порядка l включительно принадлежат пространству L_p см.[1]).

Показатель p предполагается столь большим, чтобы, по теореме вложения Соболева, $H_{2,p} \subset C^1$ $(p > n+1)$.

Для автономного уравнения $(f(u,t) \equiv f(u),\ g(t,x) \equiv g(x))$ гильбертов случай $p = 2$ был исследован в работах [2], [3]. Однако, для корректного определения нелинейного оператора $f(u,t)$ в этом случае необходимо наложить весьма сильные ограничения на рост функции $f(u,t)$ по u. В настоящей статье никаких ограничений на рост $f(u,t)$ по u не налагается.

Основной задачей данной работы является исследование поведения решений уравнения (0.1) при $t \to +\infty$. Фундаментальное значение при этом имеет следующая оценка

$$||u, \Omega_t||_{2,p} \le R(u_0)e^{-\alpha t} + R_1(g) \tag{0.2'}$$

Здесь $\alpha > 0$ и константа R_1 не зависит от u_0 (см. (0.6)). Эта оценка позволяет применить к исследованию задачи (0.1) методы теории аттракторов [4], [5].

Так как условия, наложенные нами на нелинейную функцию f (см. (0.4)), обеспечивают, вообще говоря, лишь существование (но не единственность) решения задачи (0.1), то для описания поведения решений при $t \to \infty$ строится траекторный аттрактор динамической системы, порожденной полугруппой $\{T_s,\ s \ge 0\}$ положительных сдвигов вдоль решений уравнения (0.1) (см. [6],[7]). При этом, в случае явной зависимости f и g от t, естественно изучать семейство уравнений вида (0.1), порожденное всеми положительными сдвигами этого уравнения, а также их пределами в соответствующей топологии (см. §6–§8). Траекторный аттрактор притягивает при $t \to +\infty$ все ограниченные множества траекторий указанного выше семейства. Кроме того, так же как и обычный аттрактор, траекторный аттрактор строго инвариантен относительно полугруппы $\{T_s,\ s \ge 0\}$ и порождается всеми ограниченными при $t \in \mathbb{R}$ траекториями этой полугруппы.

Для полноты изложения, основные определения и понятия, связанные с абстрактной схемой построения траекторного аттрактора, кратко изложены в §6.

Альтернативный подход к исследованию уравнения (0.1), связанный с построением аттрактора полугруппы многозначных отображений, развит в работе [3].

В работе рассмотрен ряд приложений основного результата о существовании траекторного аттрактора уравнения (0.1) (теоремы 7.3). В частности, исследован вопрос о существовании ограниченных при $t \in \mathbb{R}$ решений (0.1) в случае, когда f и g заданы на всей оси (см. теоремы 8.4 и 10.4). Этот вопрос весьма важен при изучении решений типа бегущей волны соответствующего (0.1) параболического уравнения.

Кроме того, изучен вопрос о стабилизации при $t \to \infty$ решений уравнения (0.1) в случае, если главная часть нелинейной функции f является потенциальной (теоремы 9.2 и 10.3). Рассмотрены также некоторые вопросы теории возмущений траекторного аттрактора (см. теорему 9.1).

В заключение хотелось бы отметить, что вторая глава настоящей работы зародилась во время пребывания одного из авторов в Автономном университете г. Барселоны. При этом весьма полезными оказались многочисленные обсуждения с профессорами X. Mora и J. Sola-Morales круга вопросов, связанных с содержанием настоящей статьи. Авторы выражают им свою искреннюю признательность.

Глава 1. Априорные оценки и существование решений.

Эта глава посвящена доказательству разрешимости нелинейной эллиптической системы (0.1) и выводу оценки (0.2′). Напомним, что под решением задачи (0.1) понимается функция u, имеющая конечную норму (0.2) и удовлетворяющая уравнению (0.1), понимаемому как равенство в L_p. Банахово пространство функций, принадлежащих пространству $\left[H_{2,p}(\Omega_t)\right]^k$, $\forall t \ge 0$ и удовлетворяющих условию (0.2), обозначим через $F_+^a = F_+^a(p)$.

Предполагается, что g принадлежит пространству $\left[L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, L_p(\omega)\right]^k$ для некоторого $p > n+1$ и имеет конечную норму

$$|g|_a = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} ||g, \Omega_t||_{L_p} < \infty \text{ , где } \Omega_t = [t, t+1]\times\omega \tag{0.3}$$

Нелинейная функция f удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} 1)\ f \in C(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^k) \\ 2)\ f(u,t)\,.\,u \ge C(-1+|u|^{2+\varepsilon}) \ ,\ \varepsilon > 0 \ ,\ C > 0 \\ 3)\ |f(u,t)| \le Q(|u|), \text{ где } Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ монотонная функция} \end{cases} \tag{0.4}$$

Здесь и далее через $u\,.\,v$ обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$.

Замечание. Пункт 2) условий (0.4) может быть ослаблен следующим образом: 2′) $f(u,t)\,.\,u \ge -C$, однако, в этом случае необходимо наложить некоторые дополнительные условия на матрицу γ .

Начальное условие u_0 предполагается принадлежащим пространству

$$V_0 = \left[H_{2-\frac{1}{p}\,,\,p}(\omega) \cap H^0_{1,p}(\omega)\right]^k \quad (u_0 \in V_0) \text{ (см. [8])} \tag{0.5}$$

Основным результатом данной главы является следующая теорема:

Теорема 1. *1) Задача* (0.1) *имеет хотя бы одно решение в пространстве* F_+^a .

2) Любое решение задачи (0.1) *допускает оценку*

$$||u, \Omega_t||_{2,p} \le Q_1(||u_0||_{V_0})e^{-\alpha t} + Q_1(|g|_a) \tag{0.6}$$

Здесь $Q_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *– некоторая монотонная функция,* $\alpha > 0$.

Отметим, что аналогичная (0.6) оценка в случае $p = 2$ содержится в любезно предоставленной авторам рукописи профессора J. Sola-Morales.

Оценка (0.6) будет использована в главе 2 для построения траекторного аттрактора задачи (0.1).

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных результатов, которые изложены в §§1–3.

Параграф 1 посвящен изучению обыкновенного уравнения, которое является частным случаем уравнения (0.1) при $n = 0$, $k = 1$, $f = 0$.

В параграфе 2, на основании результатов §1, получена оценка (0.6) для решений линейного уравнения вида (0.1) (Случай $k = 1$, $f = 0$).

В параграфе 3 доказаны теоремы сравнения для ограниченных решений линейного уравнения из §2, соответствующих различным правым частям $g(t, x)$.

В параграфе 4, на основании результатов §2 и §3, получена априорная оценка (0.6) в общем случае.

Разрешимость задачи (0.1) доказана на основании оценки (0.6) в §5.

Результаты, полученные в параграфах 1–3 представляют некоторый самостоятельный интерес.

Так как в данной работе нас не интересуют явные выражения для функции Q_1 в оценке (0.6), то всюду в дальнейшем, где это не приводит к путанице, вообще говоря, различные константы могут обозначаться одинаковыми символами.

§1. *Ограниченные решения обыкновенного уравнения*

В этом параграфе мы рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} y''(t) + 2\gamma y'(t) - \mu^2 y(t) = h(t) \\ y(0) = y_0 \; ; \; \gamma \in \mathbb{R} \; ; \; \mu > 0 \; ; \; t \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Предполагается, что

$$h(t) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \text{ и } |h|_a = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} ||h||_{L_1[t,t+1]} < \infty$$

Теорема 1. *Пусть $y(t)$ – ограниченное при $t \to +\infty$ решение задачи* (1.1). *Тогда $y(t)$ допускает следующую оценку:*

$$y(t) \leq |y_0| e^{-\alpha t} + C|h_-|_a \text{ , где } h_-(t) = \max\{-h(t), 0\} \text{ , } \alpha > 0 \tag{1.2}$$

Лемма 1. *Фундаментальное решение уравнения* (1.1) *имеет вид:*

$$d(t) = -\frac{1}{2\beta} e^{-\gamma t - \beta |t|} \text{ , } \beta = \sqrt{\gamma^2 + \mu^2}$$

Доказательство леммы 1 проводится прямым вычислением.

Доказательство теоремы 1. Так как $d(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то частное решение задачи (1.1), может может быть получено как свертка с фундаментальным решением:

$$y_1(t) = h * d = \int_0^\infty h(s) d(t-s) \, ds$$

Осталось решить однородное уравнение. Элементарные выкладки показывают, что единственное решение задачи (1.1) в классе ограниченных функций задается формулой

$$y(t) = y_0 e^{-(\gamma+\beta)t} + \int_0^\infty h(s) K(t,s) \, ds \tag{1.3}$$

Здесь

$$K(t,s) = -\frac{1}{2\beta} e^{-\gamma(t-s)} \left(e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(|t|+|s|)} \right)$$

Заметим, что функция Грина $K(t,s) \le 0$, поэтому

$$y(t) \le |y_0|e^{-\alpha t} - \int_0^\infty h_-(s)K(t,s)\,ds\ ,\ \alpha = \gamma + \beta > 0 \tag{1.4}$$

Оценим интеграл в правой части последнего неравенства

$$-\int h_-(s)K(t,s)\,ds \le \frac{1}{2\beta}\left[\int_0^t e^{-\gamma(t-s)+\beta(s-t)}h_-(t)\,ds + \right.$$
$$\left. + \int_t^\infty e^{-\gamma(t-s)+\beta(t-s)}h_-(s)\,ds + \int_0^\infty e^{-\gamma(t-s)-\beta(t+s)}h_-(s)\,ds\right]$$

Оценим первый интеграл в этом неравенстве. (Остальные два оцениваются аналогично). Пусть $N < t \le N+1$. Тогда

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-s)+\beta(s-t)}h_-(s)\,ds = e^{(-\gamma-\beta)t}\int_0^t e^{(\gamma+\beta)s}h_-(s)\,ds \le e^{-(\beta+\gamma)N}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^N \int_n^{n+1} e^{(\beta+\gamma)s}h_-(s)\,ds \le e^{-(\beta+\gamma)N}\sum_{n=0}^N e^{(\beta+\gamma)(n+1)}|h_-|_a \le C_1|h_-|_a$$

Итак,

$$-\int_0^\infty h_-(s)K(t,s)\,ds \le C_2|h_-|_a \tag{1.5}$$

Оценка (1.2) следует теперь из формулы (1.4). Теорема 1 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь уравнение вида (1.1) на конечном интервале $[0,M]$.

Теорема 2. *Уравнение*

$$\begin{cases} y''(t) + 2\gamma y'(t) - \mu^2 y(t) = h(t) \\ y(0) = y_0\ ;\ y(M) = y_1 \end{cases} \tag{1.6}$$

имеет единственное решение, которое удовлетворяет следующей оценке:

$$y(t) \le C\left(|y_0|e^{-\alpha t} + |y_1|e^{-\alpha(M-t)}\right) + C|h_-|_a \tag{1.7}$$

Константы $C > 0$ и $\alpha > 0$ в формуле (1.7) не зависят от M.

Лемма 2. *Функция Грина задачи (1.6) имеет вид:*

$$G(t,s) = -\frac{e^{-\gamma(t-s)}}{\beta\,\mathrm{sh}\,\beta M}\begin{cases} \mathrm{sh}\,\beta t\,\mathrm{sh}\,\beta(M-s)\,, & t < s \\ \mathrm{sh}\,\beta s\,\mathrm{sh}\,\beta(M-t)\,, & t \ge s \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 проводится непосредственным вычислением.

Доказательство теоремы 2. Нетрудно проверить, что решение $y(t)$ уравнения (1.6) задается формулой

$$y(t) = y_0 e^{-\gamma t}\frac{\mathrm{sh}\,\beta(M-t)}{\mathrm{sh}\,\beta M} + y_1 e^{\gamma(M-t)}\frac{\mathrm{sh}\,\beta t}{\mathrm{sh}\,\beta M} + \int_0^M h(s)G(t,s)\,ds \tag{1.8}$$

Очевидно, что первые два слагаемых равенства (1.8) равномерно оцениваются сверху через $C(|y_0|e^{-\alpha t} + |y_1|e^{-\alpha(M-t)})$, где $\alpha = \min\{\beta+\gamma, \beta-\gamma\} > 0$. Оценим третье слагаемое. Так как $G(t,s) \le 0$, то

$$\int_0^M h(s)G(t,s)\,ds \le -\int_0^M h_-(s)G(t,s)\,ds$$

Далее,

$$-\int_0^M h_-(s)G(t,s)\,ds = \frac{e^{-\gamma t}}{\beta \operatorname{sh}\beta M}\Big[\operatorname{sh}\beta(M-t)\int_0^t h_-(s)e^{\gamma s}\operatorname{sh}\beta s\,ds + \\ + \operatorname{sh}\beta t\int_t^M h_-(s)e^{\gamma s}\operatorname{sh}\beta(M-s)\,ds\Big]$$

Оценивая гиперболические синусы соответствующими экспонентами и, далее рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем равномерную оценку

$$-\int_0^M h_-(s)G(t,s)\,ds \le C_1|h_-|_a$$

Теорема 2 доказана. □

§2. *Ограниченные решения линейного эллиптического уравнения.*

В этом параграфе рассмотрен следующий скалярный случай ($k = 1$) уравнения (0.1) с $f \equiv 0$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + 2\gamma\partial_t u + \Delta u = g(t) \\ u|_{t=0} = u_0\ ;\ u|_{\partial\omega} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

в полуцилиндре Ω_+ . Предполагается, что u_0 принадлежит пространству V_0 , а показатель p удовлетворяет неравенству $2 \le p < \infty$. Предполагается также, что функция $g(t)$ принадлежит пространству $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, L_p(\omega))$ и имеет конечную норму $|g|_a < \infty$ (см. (0.3)).

Под решением задачи (2.1) подразумевается функция $u \in F_a^+$, удовлетворяющая уравнению (2.1) в смысле равенства в $L_p(\Omega_t)$, $\forall t \ge 0$.

Теорема 1. *Пусть* u *– решение задачи* (2.1). *Тогда*

$$||u,\Omega_t||_{2,p} \le C(||u_0||_{V_0}e^{-\alpha t} + |g|_a)\ ;\ C,\alpha > 0 \tag{2.2}$$

Доказательство этой теоремы будет проведено в несколько шагов. В качестве первого шага получим оценку вида (2.2) для функции

$$y(t) = \int_\omega |u(t)|^p\,dx = ||u(t)||_{0,p}^p = ||u(t)|u(t)|^{\frac{p-2}{2}}||^2$$

Здесь и ниже $(u,v) = \int_\omega uv\,dx$ – скалярное произведение в $L_2(\omega)$, $||u||_{l,p}$ – норма в пространстве $H_{l,p}(\omega)$, $||u|| = ||u||_{0,2}$.

Лемма 1. *Обобщенные производные* $y'(t)$ *и* $y''(t)$ *принадлежат пространству* $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ *и вычисляются по следующим формулам:*

$$\begin{cases} y'(t) = p(\partial_t u, u|u|^{p-2}) \\ y''(t) = p(\partial_t^2 u, u|u|^{p-2}) + p(p-1)||\partial_t u|u|^{\frac{p-2}{2}}||^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Доказательство этой леммы следует из неравенства Гельдера, теоремы Фубини, используя стандартные методы теории обобщенных функций.

Лемма 2. *Всякое решение $u(t)$ задачи (2.1) удовлетворяет неравенству*

$$||u(t)||_{0,p} \leq C(||u_0||_{0,p}e^{-\alpha t} + |g|_a) \ ; \ \mathrm{C}, \alpha > 0 \tag{2.4}$$

Доказательство. Умножив уравнение (2.1) скалярно на $u|u|^{p-2}$, получим

$$(\partial_t^2 u, u|u|^{p-2}) - \frac{4(p-1)}{p^2}||u|u|^{\frac{p-2}{2}}||_{1,2}^2 = (g, u|u|^{p-2}) - 2\gamma(\partial_t u, u|u|^{p-2}) \tag{2.5}$$

Подставив выражения (2.3) в уравнение (2.5), получим следующее уравнение:

$$y''(t) + 2\gamma y'(t) - \mu^2 y(t) = h(t) \text{ , где} \tag{2.6}$$

$$h(t) = \frac{4(p-1)}{p}||u|u|^{\frac{p-2}{2}}||_{1,2}^2 - \mu^2 y(t) + p(p-1)||\partial_t u|u|^{\frac{p-2}{2}}||^2 + p(g, u|u|^{p-2})$$

Здесь $\mu > 0$ некоторая константа, которая будет определена позднее. Оценим снизу $h(t)$. Согласно неравенству Гельдера $(1/p + 1/p' = 1)$

$$\begin{aligned} |(g, u|u|^{p-2})| \leq ||g||_{0,p}||u|u|^{p-2}||_{0,p'} = ||g||_{0,p}||u||_{0,p}^{p-1} \leq \\ \leq C_\varepsilon||g||_{0,p}^p + \varepsilon||u||_{0,p}^p = C_\varepsilon||g||_{0,p}^p + \varepsilon y(t) \end{aligned} \tag{2.6'}$$

Выберем μ и ε столь малыми, чтобы

$$\frac{4(p-1)}{p}||u|u|^{\frac{p-2}{2}}||_{1,2}^2 - (p\varepsilon + \mu^2)||u|u|^{\frac{p-2}{2}}||^2 \geq 0$$

Тогда

$$h(t) \geq -C_1||g||_{0,p}^p \text{ или } h_-(t) \leq C_2||g(t)||_{0,p}^p \tag{2.7}$$

Применив к уравнению (2.6) оценку (1.2), получим неравенство (2.4). □

В качестве следующего шага получим оценку нормы функции $u(t,x)$ по цилиндру Ω_t в пространствах $H_{1,2}$ и $L_{p+\delta}$ для некоторого $\delta > 0$. Обозначим: $\Omega_{t,s} = [t,s] \times \omega$, $||u, \Omega_{t,s}||_{l,p} = ||u||_{H_{l,p}(\Omega_{t,s})}$. Тогда $\Omega_t = \Omega_{t,t+1}$.

Лемма 3. *Всякое решение $u(t)$ задачи (2.1) удовлетворяет неравенствам*

$$||u, \Omega_T||_{1,2} \leq C_\beta\left(||u_0||_{V_0}e^{-\alpha T} + |g|_a\right) + \beta\chi(1-T)||u, \Omega_0||_{2,p} \tag{2.8}$$

$$||u, \Omega_T||_{0,p+\delta} \leq C_\beta\left(||u_0||_{V_0}e^{-\alpha T} + |g|_a\right) + \beta\chi(1-T)||u, \Omega_0||_{2,p} \tag{2.9}$$

Здесь $T \geq 0$; $0 < \delta \leq \frac{2p}{n-1}$; $\alpha > 0$; $\chi(z)$ – функция Хевисайда, равная нулю при $z \leq 0$ и единице при $z > 0$, а константа $\beta > 0$ может быть выбрана сколь угодно малой.

Доказательство. Умножим уравнение (2.1) скалярно в пространстве $L_2(\omega)$ на $\phi u|u|^l$, где $l \geq 0$, ϕ – срезающая функция, которая равна единице на отрезке $[T, T+1]$ и нулю вне отрезка $[T-1, T+2]$. После элементарных преобразований получим следующее соотношение

$$\begin{aligned} & -(l+1)\phi\left\{||\partial_t u|u|^{l/2}||^2 + \frac{4}{(l+2)^2}||u|u|^{l/2}||_{1,2}^2\right\} + \\ & + \partial_t(\partial_t u\phi u|u|^l, 1) - \frac{1}{l+2}\partial_t(\phi'(|u|^{l+2}, 1) + \frac{1}{l+2}\phi''(|u|^{l+2}, 1) + \\ & + \frac{1}{l+2}\partial_t(2\gamma\phi(u, u|u|^l)) - \frac{2\gamma\phi'}{l+2}(u, u|u|^l) = (\phi u|u|^l, g) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Предположим сначала, что $T \geq 1$. Тогда, оценив правую часть (2.10) так же, как и в формуле (2.6′), и, проинтегрировав по отрезку $[T-1, T+2]$, получим

$$(2.11') \qquad ||u|u|^{l/2}, \Omega_T||^2_{1,2} \leq C_1 \left(||u, \Omega_{T-1,T+2}||^{l+2}_{0,l+2} + |g|^{l+2}_a \right)$$

Пусть теперь $T < 1$, тогда после интегрирования (2.10) по отрезку $[0, T+2]$ в неравенстве (2.11′) появятся дополнительные члены, связанные с тем, что в этом случае $\phi(0)u(0) \neq 0$. Члены, не содержащие $\partial_t u(0)$, легко оцениваются через $||u(0)||^{l+2}_{0,l+2} \leq C_2||u_0||^{l+2}_{V_0}$. Остается оценить член, содержащий $\partial_t u(0)$.

$$\phi(\partial_t u, u|u|^l)|_{t=0} \leq C_3||\partial_t u(0)||_{0,l+2}||u(0)||^{l+1}_{0,l+2} \leq \beta||u, \Omega_0||^{l+2}_{2,p} + C_\beta||u_0||^{l+2}_{V_0}$$

Таким образом, как в случае $T \geq 1$, так и в случае $T < 1$, получаем оценку

$$(2.11) \quad ||u|u|^{l/2}, \Omega_T||^2_{1,2} \leq C_1 \left(||u, \Omega_{T-1,T+2}||^{l+2}_{0,l+2} + |g|^{l+2}_a \right) + \\ + \chi(1-T)(C_\beta||u_0||^{l+2}_{V_0} + \beta||u, \Omega_0||^{l+2}_{2,p})$$

Здесь и далее под $\Omega_{T-1,T+2}$ при $T < 1$ подразумевается $\Omega_{0,T+2}$.

Рассмотрим частные случаи неравенства (2.11).

1. Пусть $l = 0$. Тогда, используя очевидную оценку

$$(2.11'') \qquad ||u, \Omega_{T-1,T+2}|| \leq C_4||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{0,p} \leq C_5 \sup_{t\in[T-1,T+2]} ||u(t)||_{0,p}$$

и неравенство (2.4), получаем из (2.11) оценку (2.8).

2. Пусть $l = p-2$. Тогда, согласно теореме вложения С.Л.Соболева [9],

$$(2.12) \qquad ||u||^p_{0,qp} \leq C(||u|u|^{\frac{p-2}{2}}||^2_{1,2} + ||u|u|^{\frac{p-2}{2}}||^2) \ ; \ q = 1 + \frac{2}{n-1}$$

Пусть $0 < \delta \leq \frac{2p}{n-1}$. Тогда, из последней формулы и оценки (2.11), получим
(2.13)

$$||u, \Omega_T||_{0,p+\delta} \leq C_0 \left(||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{0,p} + |g|_a + \chi(1-T)(C_\beta||u_0||_{V_0} + \beta||u, \Omega_0||_{2,p}) \right)$$

Подставив оценки (2.11′′) и (2.4) в (2.13), получаем неравенство (2.9). □

Воспользуемся теперь регулярностью решений уравнения Лапласа в пространствах L_p .

Лемма 4. *Пусть $p_0 \leq p$. Тогда любое решение $u(t)$ задачи (2.1) удовлетворяет неравенству*

$$(2.14.) \quad ||u, \Omega_T||_{2,p_0} \leq C \left(||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{1,p_0} + |g|_a + \chi(1-T)||u_0||_{V_0} \right) \ ; \ C > 0$$

Доказательство. Умножим (2.1) на срезающую функцию $\phi(t)$ (такую же как и ранее) и перепишем полученное уравнение в следующем виде:

$$(2.14') \qquad \begin{cases} \partial_t^2(\phi u) + \Delta(\phi u) = g_1 \\ g_1 = \phi g + 2\phi' \partial_t u - 2\gamma\phi\partial_t u + \phi'' u \end{cases}$$

Предположим сначала, что $T \geq 1$. Тогда $\phi u|_{\partial\Omega_{T-1,T+2}} = 0$. Применяя к (2.14′) теорему о L_{p_0} регулярности уравнения Лапласа (см. [8]), получим

$$||u, \Omega_T||_{2,p_0} \leq ||\phi u, \Omega_{T-1,T+2}||_{2,p_0} \leq C_1||g_1, \Omega_{T-1,T+2}||_{0,p_0}$$

Непосредственно из определения функции g_1 следует оценка

$$||g_1, \Omega_{T-1,T+2}||_{0,p_0} \leq C_2(||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{1,p_0} + |g|_a)$$

Таким образом, при $T \geq 1$ неравенство (2.14) доказано. Пусть теперь $T < 1$. Тогда $\phi u|_{t=0} \neq 0$ и поэтому теорема о L_{p_0} регулярности примет вид (см. [9]):

$$||u, \Omega_T]||_{2,p_0} \leq C_3(||g_1, \Omega_{T-1,T+2}||_{0,p_0} + ||u_0||_{V_0})$$

Рассуждая далее так же, как и в случае $T \geq 1$ получим оценку (2.14). $\square$

Для оценки $||u||_{1,p_0}$ воспользуемся неравенством Гальярдо–Ниренберга в следующей форме (см. [9])

Теорема (Гальярдо - Ниренберг). *Пусть* $u \in H_{l_1,p_1} \cap H_{l_2,p_2}$; $1 < p_1, p_2 < \infty$; $-\infty < l_1, l_2 < \infty$; $l = l_1\theta + (1-\theta)l_2$; $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$; $\theta \in [0,1]$. *Тогда*

$$||u||_{l,p} \leq C||u||^{\theta}_{l_1,p_1}||u||^{1-\theta}_{l_2,p_2}$$

Следствие. *Пусть* $l_1 = 0$, $l_2 = 2$, $\theta = 1/2$, $p_1 = p + \delta$, $p_2 = p_0$. *Тогда неравенство Гальярдо–Ниренберга примет вид:*

$$||u||_{1,m} \leq C||u||^{1/2}_{0,p+\delta}||u||^{1/2}_{2,p_0} \tag{2.15}$$

Показатель m *в оценке* (2.15) *вычисляется по формуле*

$$m = m(p_0) = p_0\frac{2(p+\delta)}{p+\delta+p_0} \geq p_0(1+\frac{1}{n}) \quad \text{при} \quad p_0 \leq p\ ;\ \delta = \frac{2p}{n-1} \tag{2.16}$$

Лемма 5. *Для любого решения* $u(t)$ *задачи* (2.1) *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}||u, \Omega_T||_{2,p} \leq C\,(||u, \Omega_{T-K,T+K+1}||_{0,p+\delta} + ||u, \Omega_{T-K,T+K+1}||_{1,2} + \\ +|g|_a + \chi(K-T)||u_0||_{V_0})\end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь $0 < K \leq \left[\frac{\ln p/2}{\ln(1+1/n)}\right] + 2$, $C > 0$, *где* $[x]$ *означает целую часть числа* x .

Доказательство. Построим последовательность показателей p_k по следующему правилу $p_0 = 2$, $p_{k+1} = \min\{p, m(p_k)\}$, где функция m определена равенством (2.16), которое гарантирует также, что $p_{K-1} = p$. Использовав оценки (2.14) и (2.15), получим

$$\begin{aligned}||u, \Omega_T||_{1,p_{k+1}} \leq C_1||u, \Omega_T||^{1/2}_{2,p_k}||u, \Omega_T||^{1/2}_{0,p+\delta} \leq \\ \leq C_2(||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{1,p_k} + \chi(1-T)||u_0||_{V_0} + |g|_a + ||u, \Omega_T||_{0,p+\delta})\end{aligned} \tag{2.18}$$

Итерируя неравенство (2.18) $L = K - 1$ раз, получаем оценку

$$\begin{aligned}||u, \Omega_T||_{1,p} \leq C_3\,(||u, \Omega_{T-L,T+L+1}||_{0,p+\delta} + ||u, \Omega_{T-L,T+L+1}||_{1,2} + \\ +|g|_a + \chi(L-T)||u_0||_{V_0})\end{aligned}$$

Утверждение леммы следует теперь из неравенства (2.14) с $p_0 = p$. $\square$

Замечание. *Без ограничения общности, можно считать константу* K *в неравенстве* (2.17) *равной единице (формально, для этого нужно было выбрать срезающую функцию* ϕ *равной нулю вне отрезка* $[T - 1/K, T + 1 + 1/K]$*):*

$$||u, \Omega_T||_{2,p} \leq C_0\,(||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{0,p+\delta} + ||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{1,2} + |g|_a + \chi(1-T)||u_0||_{V_0}) \tag{2.20}$$

Окончание доказательства теоремы 1. Предположим сначала, что $T = 0$. Тогда, подставив в (2.20) оценки (2.8) и (2.9), получим

$$||u, \Omega_0||_{2,p} \leq C_1(||u_0||_{V_0} + |g|_a) + C_2\beta||u, \Omega_0||_{2,p}$$

Выбирая константу $\beta < 1/(2\mathrm{C}_2)$, получаем

$$(2.20') \qquad ||u,\Omega_0||_{2,p} \le C_3(||u_0||_{V_0} + |g|_a)$$

Пусть теперь $T > 0$. Вновь подставив оценки (2.8) и (2.9) в неравенство (2.20), учитывая (2.20′), получим оценку (2.2). Теорема 1 доказана. $\square$

Аналогичный результат справедлив и для ограниченного цилиндра.

Теорема 2. *Пусть u – решение задачи Дирихле*

$$(2.21) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u + 2\gamma\partial_t u + \Delta u = g(t) \\ \ u|_{t=0} = u_0 \ ; \ u|_{t=M} = u_1 \end{cases}$$

Тогда справедлива следующая равномерная по M *оценка:*

$$(2.22) \qquad ||u,\Omega_T||_{2,p} \le C(||u_0||_{V_0} e^{-\alpha T} + ||u_1||_{V_0} e^{-\alpha(M-T)} + |g|_a) \ ; \ C,\alpha > 0$$

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично приведенному выше, только в доказательстве леммы 2 вместо оценки (1.2) необходимо воспользоваться оценкой (1.7), а в доказательстве лемм 3 и 4 отдельно рассмотреть случаи $T \in [0,1)$; $T \in [1, M-1]$ и $T \in (M-1, M]$.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие $p > \frac{n+1}{2}$. Тогда решения задач* (2.1) *и* (2.21) *принадлежат пространству $C_b(\Omega_+)$ и удовлетворяют оценкам*

$$(2.23) \qquad |u(t,x)| \le C(||u_0||_{V_0} e^{-\alpha t} + |g|_a) \ ; \ C,\alpha > 0$$

и

$$(2.24) \qquad |u(t,x)| \le C(||u_0||_{V_0} e^{-\alpha t} + ||u_1||_{V_0} e^{-\alpha(M-t)} + |g|_a) \ ; \ C,\alpha > 0$$

соответственно.

Утверждение следствия 1 следует из полученных ранее оценок и теоремы вложения $H_{2,p}(\Omega_T) \subset C(\Omega_T)$.

Теорема 3. *Задачи* (2.1) *и* (2.21) *разрешимы в пространстве F_a^+ и удовлетворяют неравенствам* (2.23) *и* (2.24) *соответственно.*

Доказательство существования решения проводится стандартным образом на основе априорных оценок (2.23), (2.24) и соображений компактности. (Вывод существования решения из этих оценок будет приведен в §5 в более общей ситуации).

§3. Принцип максимума для ограниченных решений линейного уравнения.

В этом параграфе мы докажем применимость принципа максимума к ограниченным обобщенным решениям задач (2.1) и (2.21). Начнем с исследования уравнения (2.21) в ограниченном цилиндре $\Omega_M = \Omega_{0,M}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ линейный дифференциальный оператор

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \partial_t^2 u + 2\gamma\partial_t u + \Delta u - Pu \\ u|_{\partial\Omega_M} = 0 \ , \ P \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Теорема 1. *Предположим, что*

$$u, v \in H_{1,2}(\Omega_M)\ ;\ u - v \in H^0_{1,2}(\Omega_M)\ ;\ \lambda_1 + P > 0$$

Здесь λ_1 *– первое собственное число оператора Лапласа. Пусть также*

$$\mathcal{L}u \geq \mathcal{L}v \text{ (то есть } \int_0^M (\mathcal{L}u - \mathcal{L}v, \psi)\, dt \geq 0 \quad \forall \psi \in H^0_{1,2}(\Omega_M) \quad \psi \geq 0 \text{ п.в.)}$$

Тогда

$$u \leq v \text{ п.в.}$$

Доказательство. Пусть $w = u - v$, тогда по условию теоремы $\mathcal{L}w \geq 0$ п.в. Умножим, следуя [10], неравенство $\mathcal{L}w \geq 0$ скалярно на $w_+ = \max\{w, 0\}$. Так как $w = w_+ - w_-$ и $(\nabla w_+, \nabla w_-) = 0$, $(w_+, w_-) = 0$, то

$$-||w_+||^2_{1,2} - P||w_+||^2_{0,2} \geq 0$$

Применяя неравенство Фридрихса, получим

$$(\lambda_1 + P)||w_+||^2_{0,2} \leq 0$$

Так как $\lambda_1 + P > 0$, то $||w_+|| = 0$. Теорема 1 доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $u|_{t=0} = v|_{t=0}$ *;* $u, v|_{\partial\omega} = 0$ *;* $u, v \in H_{2,p}(\Omega_M)$ *,* $p > \frac{n+1}{2}$ *и* $\mathcal{L}_0 u \geq \mathcal{L}_0 v$*, где через* $\mathcal{L}_0$ *обозначен оператор* $\mathcal{L}$ *при* $P = 0$ *. Тогда*

$$u(t,x) - v(t,x) \leq C||u(M) - v(M)||_{V_0} e^{-\alpha(M-t)}\ ;\ C, \alpha > 0 \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $w = u - v$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \partial_t^2 w_1 + 2\gamma \partial_t w_1 + \Delta w_1 = 0 \\ w_1|_{t=0} = 0\ ;\ w_1|_{t=M} = w|_{t=M} \end{cases} \tag{3.2}$$

Согласно (2.24), решение уравнения (3.2) допускает равномерную по M оценку

$$w_1(t,x) \leq C||u(M) - v(M)||_{V_0} e^{-\alpha(M-t)}$$

Так как $\mathcal{L}w \geq 0$ и $\mathcal{L}w_1 = 0$ то, по теореме 1, $w \leq w_1$. Следствие 1 доказано. □

Перейдем теперь к основному результату этого параграфа.

Теорема 2. *Пусть* $u_i \in F_a^+ = F_a^+(p)$, $p > \frac{n+1}{2}$, $i = 1, 2$ *– решения задач*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_i + 2\gamma \partial_t u_i + \Delta u_i = g_i(t) \\ u_i|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Пусть, кроме того,

$$g_1(t,x) \geq g_2(t,x) \text{ п.в.}$$

Тогда, всюду в Ω_+

$$u_1(t,x) \leq u_2(t,x) \tag{3.4}$$

Доказательство. Рассмотрим функции u_1 и u_2 как решения задачи (3.3) в области Ω_M . Согласно следствию 1, функции u_1 и u_2 удовлетворяют неравенству

$$u_1(t,x) - u_2(t,x) \leq C||u_1(M) - u_2(M)||_{V_0} e^{-\alpha(M-t)} \tag{3.5}$$

Переходя в неравенстве (3.5) к пределу при $M \to \infty$ и, учитывая тот факт, что $||u_1(M) - u_2(M)||_{V_0}$ ограничена, получаем оценку (3.4). □

§4. *Нелинейная эллиптическая система. Априорные оценки.*

Этот параграф посвящен исследованию решений нелинейной эллиптической системы (0.1). Всюду в дальнейшем мы вновь предполагаем, что $p > n + 1$.

Теорема 1. *Пусть $u(t)$ – решение задачи (0.1). Тогда*

$$|u(t,x)| \le C(||u_0||_{V_0} e^{-\alpha t} + 1 + |g|_a) \tag{4.1}$$

Константы $C, \alpha > 0$ не зависят от u, а через $|\cdot|$ обозначена норма в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Доказательство. Введем функцию

$$w = a u \,.\, u \tag{4.2}$$

Тогда, так как матрица a является самосопряженной, то

$$\partial_t w = 2a\partial_t u \,.\, u \ ; \ \partial_t^2 w = 2a\partial_t u \,.\, \partial_t u + 2a\partial_t^2 u \,.\, u$$
$$\Delta w = 2a\Delta u \,.\, u + 2a\nabla u \,.\, \nabla u$$

Умножив уравнение (0.1) на $u(t,x)$ (без интегрирования!), после несложных преобразований получим

$$\partial_t^2 w + \Delta w = h_u(t,x) \ , \text{ где} \tag{4.3}$$
$$h_u(t,x) = 2a\partial_t u \,.\, \partial_t u + 2a\nabla u \,.\, \nabla u - \gamma \partial_t u \,.\, u + f(u,t) \,.\, u + g(t) \,.\, u$$

Оценим снизу функцию $h_u(t,x)$, пользуясь положительностью матрицы a,

$$\begin{aligned} h_u(t,x) \ge C_1|\partial_t u|^2 + C_1|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}C_1|\partial_t u|^2 - \\ - C_2|u|^2 + C(-1 + |u|^{2+\varepsilon}) - 1/2|g(t,x)|^2 - 1/2|u|^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Очевидно, что

$$C|u|^{2+\varepsilon} - (C_2 + 1/2)|u|^2 \ge -C_3$$

Следовательно,

$$h_u(t,x) \ge h(t,x) \equiv -C_4(1 + |g(t,x)|^2) \tag{4.5}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\begin{cases} \partial_t^2 w_1 + \Delta w_1 = h(t,x) \\ w_1|_{t=0} = w|_{t=0} \end{cases} \tag{4.6}$$

Так как $p > n+1$, то $h \in L_{p_1}$, при $p_1 = p/2 > (n+1)/2$, поэтому к задаче (4.6), (4.5) можно применить принцип максимума (теорема 3.2), согласно которому

$$w(t,x) \le w_1(t,x)$$

Но $w_1(x,t)$ ограниченное решение линейного уравнения, поэтому, согласно неравенству (2.23), справедлива оценка

$$|w_1(t,x)| \le C_0(||u_0||^2_{V_0} e^{-2\alpha t} + 1 + |g|_a^2) \ ; \ \alpha > 0$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Аналогичный результат справедлив и для решений уравнения вида (0.1) в ограниченном цилиндре $\Omega_M = [0,M] \times \omega$.

Теорема 2. *Пусть $u(t)$ – решение задачи:*

$$(4.7) \qquad \begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u,t) = g(t) \\ u|_{t=0} = u_0 \ ; \ u|_{t=M} = u_1 \ ; \ u|_{\partial\omega} = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$(4.8) \qquad |u(t,x)| \le C(||u_0||_{V_0} e^{-\alpha t} + ||u_1||_{V_0} e^{-\alpha(M-t)}) + |g|_a)$$

Константы C и $\alpha > 0$ в последней формуле не зависят от M .

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично приведенному выше, только вместо оценки (2.23) необходимо воспользоваться оценкой (2.24).

Получим теперь оценки нормы u в пространстве $H_{2,p}(\Omega_T)$.

Теорема 3. *1. Пусть $u(t)$ – решение задачи* (0.1). *Тогда*

$$(4.9) \qquad ||u, \Omega_T||_{2,p} \le Q(||u_0||_{V_0}) e^{-\alpha T} + Q(|g|_a)$$

2. Пусть $u(t)$ – решение задачи (4.7). *Тогда*

$$(4.10) \qquad ||u, \Omega_T||_{2,p} \le Q_1(||u_0||_{V_0}, ||u_1||_{V_0})(e^{-\alpha T} + e^{-\alpha(M-T)}) + Q(|g|_a)$$

Здесь Q и Q_1 – некоторые монотонные функции, не зависящие от M.

Доказательство. Докажем оценку (4.9). (Оценка (4.10) доказывается аналогично). Нам понадобятся следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – гладкая функция, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > 0$, $T \in \mathbb{R}_+$. Тогда*

$$(4.11) \qquad Q(L_1 + L_2 e^{-\alpha T}) \le Q_1(L_1) + Q_1(L_2) e^{-\alpha T}$$

Здесь $Q_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ некоторая новая монотонная функция.

Доказательство.

$$Q(L_1 + L_2 e^{-\alpha T}) - Q(L_1) = \int_0^1 Q'(L_1 + sL_2 e^{-\alpha T}) L_2 e^{-\alpha T} ds \le Q(L_1, L_2) e^{-\alpha T}$$

Здесь $Q(L_1, L_2) = L_2 \sup_{s \in [0,1]} |Q(L_1 + sL_2)|$. Функцию $Q(L_1, L_2)$ оценим следующим образом:

$$Q(L_1, L_2) \le Q_*(L_1^2 + L_2^2) \le Q_*(2L_1^2) + Q_*(2L_2^2) \le Q_*^1(L_1) + Q_*^1(L_2) \text{ , где}$$
$$Q_*(r) = \sup\{|Q(L_1, L_2)| : L_1^2 + L_2^2 \le r\} \ ; \ Q_*^1(r) = Q_*(2r^2)$$

Итак,

$$Q(L_1 + L_2 e^{-\alpha T}) \le (Q + Q_*^1)(L_1) + (Q + Q_*^1)(L_2) e^{-\alpha T}$$

Лемма 1 доказана. □

Следствие 1. *Пусть $u(t)$ – решение задачи* (0.1). *Тогда*

$$(4.12) \qquad ||f(u,t), \Omega_T||_{0,p} \le Q_1(||u_0||_{V_0}) e^{-\alpha T} + Q_1(|g|_a)$$

Действительно, согласно условию (0.4)

$$(4.13) \qquad ||f(u,t), \Omega_T||_{0,p} \le C_1 Q(||u, \Omega_T||_{0,\infty}) \ ; \ C_1 > 0$$

Подставив в (4.13) оценку (4.1) и, воспользовавшись неравенством (4.11), получим оценку (4.12).

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ – решение задачи* (0.1). *Тогда,* $\forall\beta > 0$ *справедлива следующая оценка:*

$$||u, \Omega_T||_{1,2} \le C_\beta(||u_0||_{V_0} e^{-\alpha T} + 1 + |g|_a) + \beta\chi(1-T)||u, \Omega_0||_{2,p} \tag{4.14}$$

Доказательство. Предположим для простоты, что $T \ge 1$. (Случай $T < 1$ рассматривается так же, как это сделано в доказательстве леммы 2.3). Умножив (0.1) на $u(x,t)$, после несложных преобразований получим (см. (4.3), (4.4))

$$|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 \le \mathrm{C}(\partial_t^2 w + \Delta w) + C(1 + |g|^2) \tag{4.15}$$

Умножив (4.15) на срезающую функцию ϕ (такую же как и в лемме 2.3), и проинтегрировав по цилиндру $\Omega_{T-1,T+2}$, получим

$$||u, \Omega_T||_{1,2} \le C_1(||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{0,2} + 1 + |g|_a) \tag{4.16}$$

При выводе неравенства (4.16) была использована очевидная оценка

$$\int_{\mathbb{R}} \phi[(\partial_t^2 w, 1) + (\Delta w, 1)]\, dt = \int_{\mathbb{R}} \partial_t[\phi(\partial_t w, 1) - \phi'(w, 1)] + \phi''(w, 1)\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi''(w, 1)\, dt \le C_2 ||u, \Omega_{T-1,T+2}||_{0,2}$$

Подставив оценку (4.1) в формулу (4.16), получим (4.14). □

Окончание доказательства теоремы 3 проводится по схеме, изложенной в §2 для линейного уравнения (см. леммы 2.4 и 2.5). Нелинейная функция $f(u,t)$ не вносит существенных изменений в эту схему. Действительно, благодаря оценкам (4.12) и (4.14), уравнение (0.1) может быть переписано в виде

$$\partial_t^2 u + \Delta u = a^{-1}(-\gamma\partial_t u + f(u,t) + g(t))$$

с последующим применением итерационной схемы из леммы 2.5. Теорема 3 доказана. □

§5. *Нелинейная система. Существование ограниченных решений.*

В этом параграфе, на основании априорных оценок теоремы 4.3, будет доказано существование решений задачи (0.1). Решение этой задачи будет получено предельным переходом $M \to \infty$ из решений задачи (4.7). Поэтому исследуем сначала задачу (4.7).

Теорема 1. *Задача* (4.7) *разрешима при любом* $M > 0$ *и любых* $u_0, u_1 \in V_0$.

Доказательство. Умножив уравнение (4.7). на матрицу a^{-1}, получим

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta u = a^{-1}\left(-\gamma\partial_t u + f(u,t) + g(t)\right) \\ u|_{t=0} = u_0 \ ; \ u|_{t=M} = u_1 \end{cases} \tag{5.1}$$

Определим, согласно обратной теореме о следах (см.[9]), функцию v так, чтобы $v|_{\partial\Omega_M} = u|_{\partial\Omega_M}$ и $v \in H_{2,p}(\Omega_M)$. Тогда, функция $w = u - v$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w + \Delta w = a^{-1}\left(-\gamma\partial_t w + f(v + w, t) + g_1(t)\right) \\ w|_{t=0} = 0 \ ; \ w|_{t=M} = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Здесь $g_1 = -a(\partial_t^2 v + \Delta v) - \gamma\partial_t v + g$.

Обозначим через A оператор, обратный к оператору Лапласа по переменным (t,x) в области Ω_M и нулевыми граничными условиями. Тогда, согласно теореме о регулярности (см. [8]),

$$A : [L_p(\Omega_M)]^k \to W \equiv [H_{2,p}(\Omega_M)]^k \cap \left[H^0_{1,p}(\Omega_M)\right]^k$$

Применив оператор A к обеим частям (5.2), получим

$$w + F(w) = h \equiv -A(\partial_t^2 v + \Delta v) \text{ , где} \tag{5.3}$$

$$F(w) = -Aa^{-1}(-\partial_t w + f(v+w,t) + g - \gamma\partial_t v)$$

Рассмотрим (5.3) как уравнение в пространстве W. Для его решения воспользуемся теоремой Лерэ–Шаудера в следующей формулировке (см. [11]):

Теорема. *Пусть D – ограниченное открытое множество банахова пространства W, $F : \overline{D} \to W$ – компактный непрерывный оператор. Пусть, далее, точка $h \in D$ такова, что*

$$w + sF(w) \neq h \text{ для любых } w \in \partial D \text{ и } s \in [0,1] \tag{5.4}$$

Тогда уравнение

$$w + F(w) = h$$

имеет в D хотя бы одно решение.

Выберем в качестве D шар B_R достаточно большого радиуса R в пространстве W и проверим выполнение условия (5.4). Предположим противное:

$$w + s_0 F(w) = h \text{ ; } s_0 \in [0,1] \tag{5.4$'$}$$

для некоторого w, $||w||_W = R$. Применяя к этому уравнению обратные преобразования, получим, что функция $u = v + w$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + s_0\gamma\partial_t u - s_0 f(u,t) = s_0 g(t) \\ u|_{t=0} = u_0 \text{ ; } u|_{t=M} = u_1 \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет вид (4.7), поэтому для его решения справедлива оценка (4.10), согласно которой $||u||_W \le C(u_0,u_1)$. Нетрудно проверить, что константа в последней формуле не зависит от $s_0 \in [0,1]$ (см. (4.4)). Так как функция v фиксирована, то из последнего неравенства следует, что $||w||_W \le L$, где константа L не зависит от s_0. Таким образом, при $R > L$ равенство (5.4$'$) не может иметь места. Противоречие. Следовательно, условие (5.4) выполнено. Проверим теперь компактность оператора F. Представим нелинейную часть $Aa^{-1}f(v+w,t)$ оператора F в виде композиции $A \circ F_2 \circ F_1$, где $F_1 : W \to C = C(\Omega_M)$ – оператор вложения, а оператор $F_2 : C \to C$ определяется формулой $F_2 w = a^{-1}f(v+w,t)$. Так как функция f непрерывна, то оператор F_2 также непрерывен. Компактность оператора F_1 следует из теоремы вложения С.Л.Соболева. Поэтому нелинейная часть оператора F компактна как композиция трех непрерывных операторов, один из которых компактен. Компактность линейной части оператора F очевидна. Следовательно, по теореме Лерэ–Шаудера, задача (4.7) имеет хотя бы одно решение. $\square$

Теперь мы готовы доказать существование решения основной задачи (0.1).

Теорема 2. *Задача* (0.1) *имеет в пространстве* F_a^+ *хотя бы одно решение.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $u_{\mathrm{M}}(t,x)$, $M \in \mathbb{N}$ решений задачи (4.7) с краевыми условиями $u|_{t=M} = 0$. Тогда, согласно неравенству (4.10), $||u_M, \Omega_T||_{2,p} \le C$, где константа C не зависит от M и $T \ge 0$.

Так как пространство $H_{2,p}$ рефлексивно, то единичный шар в нем слабо компактен. Выберем с помощью диагональной процедуры из u_M подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции u в пространствах $[H_{2,p}(\omega \times [0,M])]^k$ для любого натурального M . Нетрудно проверить, что u есть искомое решение. Теорема 2 доказана. $\square$

В заключение рассмотрим более общую систему вида (0.1):

$$
\begin{cases} a\left(\partial_t^2 u + \Delta u\right) + \gamma \partial_t u - f(u, \nabla u, \partial_t u, x, t) = g(t) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{5.6}
$$

Предположим, что нелинейная функция f удовлетворяет следующим условиям:

$$
\begin{cases} 1.\ f = f(u, \nabla u, \partial_t u, x, t) \text{ непрерывна по всем аргументам ;} \\ 2.\ f\,.\,u \ge -C_1 + \mathrm{C}_2|u|^{2+\varepsilon}\ ,\ \varepsilon > 0\ ; \\ 3.\ |f(u, \nabla u, \partial_t u, x, t)| \le Q(|u|)(1 + |\nabla u| + |\partial_t u|)\ ; \\ Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ -- некоторая монотонная функция.} \end{cases} \tag{5.7}
$$

Теорема 3. *Задача* (5.6) *разрешима в пространстве* F_a^+, *причем, для любого ее решения справедлива оценка* (0.6).

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет выкладки, проведенные в §§4–5. Действительно, доказательство теоремы 4.1 использует лишь пункт 2 условий (0.4), который совпадает с пунктом 2 условий (5.7), и поэтому проходит без изменений для случая уравнения (5.6). В доказательстве теоремы 4.3 оценка модуля f используется лишь при выводе оценки (4.12), которую необходимо заменить следующей оценкой:

$$
||f, \Omega_T||_{0,p_0} \le Q_1(||u_0||_{V_0})e^{-\alpha T} + Q_1(|g|_a) + \mathrm{C}||u, \Omega_T||^2_{1,p_0}
$$

Нетрудно проверить, что добавление в оценку (4.12) слагаемого $\mathrm{C}||u, \Omega_T||^2_{1,p_0}$ не препятствует применению итерационной схемы, изложенной в лемме 2.5. Таким образом, априорная оценка (0.6) остается справедливой для случая уравнения (5.6). Доказательство разрешимости уравнения (5.6) также проходит без изменений, благодаря компактности вложения $H_{2,p} \subset\subset C^1$. $\square$

Замечание. *Более аккуратный анализ итерационной схемы леммы 2.5 показывает, что пункт 3 условий* (5.7) *может быть ослаблен следующим образом:*

$$
3'.\ |f(u, \nabla u, \partial_t u, x, t)| \le Q(|u|)(1 + |\nabla u|^q + |\partial_t u|^q)\ ,\ \text{где } q < 2
$$

Глава 2. Траекторный аттрактор.

Настоящая глава посвящена исследованию поведения ограниченных решений уравнения (0.1) при $t \to \infty$. Так как единственности решений задачи (0.1), вообще говоря, нет, то для описания этого поведения используется понятие траекторного аттрактора динамической системы (см. [6], [7]). Центральную роль при построении этого аттрактора играет оценка (0.6), выводу которой посвящена глава 1.

Для простоты мы сначала ограничимся рассмотрением частного случая уравнения (0.1), когда нелинейная функция $f(u,t) \equiv f(u)$ не зависит от t:

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma\partial_t u - f(u) = g(t) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{6.0}$$

Формулировки основных результатов для уравнения (0.1) в общем случае приведены в §10.

В параграфе 6, на примере уравнения (6.0), кратко излагается абстрактная схема построения траекторного аттрактора, условия, гарантирующие его существование, и теоремы, описывающие его структуру. Подробное изложение этих вопросов дано в [6] и [7].

Параграф 7 посвящен доказательству существования траекторного аттрактора нелинейной системы (6.0).

В параграфе 8 получен ряд следствий из теоремы о существовании траекторного аттрактора системы (6.0), доказанной в параграфе 7. В частности, исследован вопрос о разрешимости уравнения (6.0) в цилиндре $\Omega = \mathbb{R}\times\omega$.

Параграф 9 посвящен исследованию вопросов, касающихся стабилизации решений уравнения (6.0) при $t \to \infty$ в потенциальном случае.

§6. Абстрактная схема.

Рассмотрим следующее семейство задач вида (6.0):

$$a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma\partial_t u - f(u) = \sigma(t)\ ,\ \sigma(\cdot) \in \Sigma \tag{6.1}$$

Предполагается, что $a, \gamma, f(u)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в начале главы 1, а семейство правых частей Σ инвариантно относительно действия полугруппы сдвигов вдоль оси t, то есть

$$T_s\Sigma \subset \Sigma\ ,\ s \geq 0\ ,\ \text{где } (T_s\sigma)(t) = \sigma(t+s) \quad t,s \in \mathbb{R}_+$$

Кроме этого, предполагается, что Σ – компактное подмножество некоторого метризуемого топологического пространства Ξ^+, в качестве которого в дальнейшем берется либо пространство $\Xi_1^+ = \left[L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, L_p(\omega))\right]^k$ либо пространство $\Xi_2^+ = \left[L_p^{\mathrm{loc},w}(\mathbb{R}_+, L_p(\omega))\right]^k$. Напомним, что топология в Ξ_1^+ задается сходимостью в пространствах $[L_p(\Omega_{t_1,t_2})]^k$

$$g_n \to g \text{ в } \Xi_1^+\ ,\ \text{если } g_n|_{\Omega_{t_1,t_2}} \to g|_{\Omega_{t_1,t_2}} \text{ в } [L_p(\Omega_{t_1,t_2})]^k\ \ \forall [t_1,t_2] \subset \mathbb{R}_+$$

Аналогично, топология в пространстве Ξ_2^+ задается слабой сходимостью в пространствах $[L_p(\Omega_{t_1,t_2})]^k$

$$g_n \to g \text{ в } \Xi_2^+\ ,\ \text{если } g_n|_{\Omega_{t_1,t_2}} \rightharpoonup g|_{\Omega_{t_1,t_2}} \text{ слабо в } [L_p(\Omega_{t_1,t_2})]^k\ \ \forall [t_1,t_2] \subset \mathbb{R}_+$$

Определение 1. *Элементы σ множества Σ будем называть символами, а само множество Σ – пространством символов семейства* (6.1).

Замечание 1. В приложениях в качестве пространства символов Σ семейства уравнений (6.1) обычно берется оболочка $\mathcal{H}^+(g)$ трансляционно - компактной функции $g \in \ \Xi^+$, являющейся правой частью уравнения (6.0) (см. §8).

Определение 2. *Для каждого $\sigma \in \Sigma$ обозначим через K_σ^+ – множество решений уравнения* (6.1)*, принадлежащих пространству F_a^+ (см. главу 1), с символом σ, а через K_Σ^+ – объединение K_σ^+ по всем $\sigma \in \Sigma$*

(6.3) $$K_\Sigma^+ = \cup_{\sigma\in\Sigma} K_\sigma^+ \ ; K_\Sigma^+ \subset F_a^+$$

Лемма 1. *Пусть Σ удовлетворяет условиям, приведенным выше. Тогда*

(1) $|\sigma|_a \leq C$ *равномерно по* $\sigma \in \Sigma$, *где* $|\cdot|_a$ *определено в* (0.3).
(2) $K_\sigma^+ \neq \varnothing \ \forall \sigma \in \Sigma$.

Доказательство пункта (1) приведено в [7]. Утверждение пункта (2) является следствием теоремы 5.2. □

Нетрудно проверить, что семейство $\{K_\sigma^+, \sigma \in \Sigma\}$ является трансляционно согласованным, то есть

(6.4) $$T_s K_\sigma^+ \subset K_{T_s\sigma}^+ \text{ , где } (T_s u)(t) = u(t+s) \ \ t, s \in \mathbb{R}_+$$

Таким образом,

(6.5) $$T_s K_\Sigma^+ \subset K_\Sigma^+$$

Введем еще одно метризуемое топологическое пространство Θ^+, в качестве которого в дальнейшем берется либо пространство $\Theta_1^+ = \left[H_{2,p}^{\mathrm{loc}}(\Omega_+)\right]^k$, либо пространство $\Theta_1^+ = \left[H_{2,p}^{\mathrm{loc},w}(\Omega_+)\right]^k$. Как и ранее, символ 'loc' означает, что топология задается сходимостью в $[H_{2,p}(\Omega_{t_1,t_2})]^k \quad \forall [t_1, t_2] \in \mathbb{R}_+$, а символ '$w$' означает, что эта сходимость слабая. Очевидно, что

(6.6) $$K_\Sigma^+ \subset F_a^+ \subset \Theta^+$$

Определение 3. *Множество $P \subset K_\Sigma^+$ называется притягивающим (точнее, (F_a^+, Θ^+)-притягивающим) множеством полугруппы T_s в K_Σ^+, если для любого ограниченного в F_a^+ подмножества $B \subset K_\Sigma^+$ и для любой окрестности $O(P)$ в пространстве Θ^+ множества P существует такое $s_0 = s_0(O(P), B)$, что*

$$T_s B \subset O(P) \ \ \forall s > s_0$$

Определение 4. *Множество $\mathbb{A} \subset K_\Sigma^+$ называется траекторным аттрактором семейства* (6.1)*, если выполнены следующие условия:*

(1) $\mathbb{A}$ – *компакт в* Θ^+.
(2) $\mathbb{A}$ – *строго инвариантно, то есть* $T_s\mathbb{A} = \mathbb{A}$, $s \geq 0$.
(3) $\mathbb{A}$ *является притягивающим множеством полугруппы* $\{T_s \, , s \geq 0\}$ *в* K_Σ^+ *в смысле определения 3* .

Для формулировки основной теоремы о существовании траекторного аттрактора нам понадобятся еще два определения.

Определение 5. *Семейство $\{K^+_\sigma\ , \sigma \in \Sigma\}$ назовем (Θ^+, Σ)-замкнутым, если его график $\cup_{\sigma\in\Sigma}(K^+_\sigma \times \{\sigma\})$ замкнут в пространстве $\Theta^+ \times \Sigma$. (При компактном Σ это свойство равносильно замкнутости множества K^+_Σ в Θ^+ см.* [7]*).*

Определение 6. *Обозначим через $\omega(\Sigma)$ – аттрактор полугруппы $\{T_s\ , s \geq 0\}$, действующей в компактном метрическом пространстве Σ .*

Как известно,

(6.6′) $$\omega(\Sigma) = \bigcap\nolimits_{s\geq 0} \Big[\bigcup\nolimits_{h\geq s} T_h \Sigma\Big]_{\Xi^+} \ \text{(см. [12], [13], [4])}$$

Через $[\cdot]_{\Xi^+}$ обозначено замыкание в топологии пространства Ξ^+.

Теорема 1 [7]**.** *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *Σ компактно и инвариантно относительно полугруппы $\{T_s\ , s \geq 0\}$:*

$$T_s\Sigma \subset \Sigma$$

(2) *Семейство $\{K^+_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ трансляционно согласовано и $(\Theta^+\ , \Sigma)$-замкнуто.*

(3) *При фиксированном s сдвиги T_s непрерывны как в пространстве Θ^+, так и в пространстве Ξ^+ .*

(4) *T_s обладает в K^+_Σ компактным притягивающим множеством.*

Тогда полугруппа $\{T_s, s \geq 0\}$ обладает в K^+_Σ траекторным аттрактором $\mathbb{A}_\Sigma$, причем

$$\mathbb{A}_\Sigma = \mathbb{A}_{\omega(\Sigma)}$$

Здесь $\mathbb{A}_{\omega(\Sigma)} \subset K^+_{\omega(\Sigma)}$ – траекторный аттрактор семейства $\{K^+_\sigma\ , \sigma \in \omega(\Sigma)\}$.

Замечание. В рассматриваемом случае условие (1) выполнено по определению Σ, а условие (3) выполняется благодаря выбору пространств Θ^+ и Ξ^+. Поэтому необходимо проверять лишь (Θ^+, Σ)-замкнутость и наличие компактного притягивающего множества. Эти условия будут проверены в следующем параграфе.

Сформулируем теперь абстрактную теорему, описывающую структуру траекторного аттрактора $\mathbb{A}_\Sigma$. Для этого нам понадобятся еще несколько определений.

Определение 7. *Функция $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ называется полным символом в $\omega(\Sigma)$, если*

$$\Pi_+\xi_s(t) = \Pi_+\xi(t+s) \in \omega(\Sigma)\ ,\ \forall s \in \mathbb{R}$$

Через Π_+ здесь обозначен оператор сужения функции на полуось $t \geq 0$.

Теорема 2 [7]**.** *Для любого $\sigma \in \omega(\Sigma)$ существует хотя бы один полный символ ξ в $\omega(\Sigma)$, такой что $\Pi_+\xi = \sigma$.*

Множество всех полных символов в $\omega(\Sigma)$ обозначим через $Z(\Sigma)$.

Определение 8. *Функцию $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ назовем полной траекторией полугруппы $\{T_s\ , s \geq 0\}$, соответствующей полному символу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, если*

$$\Pi_+u_s(t) \subset K^+_{\Pi_+\xi_s}\ ,\ \forall s \in \mathbb{R}\ ,\ u_s(t) = u(t+s)$$

Множество всех полных траекторий $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ с данным полным символом $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ограниченных в F_a^+ (то есть $||\Pi_+ u_s(t)||_a \le C_u$, $\forall s \in \mathbb{R}$) назовем ядром полного символа ξ и обозначим через K_ξ .

Замечание. Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае ядро K_ξ состоит из всех ограниченных на всей оси $t \in \mathbb{R}$ решений уравнения

$$a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u) = \xi(t)\ t \in \mathbb{R}\ ,\ ||\Pi_+ u_s(t)||_a \le C_u\ ,\ \forall s \in \mathbb{R}$$

Теорема 3 [7]. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$\mathbb{A}_\Sigma = \mathbb{A}_{\omega(\Sigma)} = \Pi_+ \cup_{\xi \in Z(\Sigma)} K_\xi = \Pi_+ K_{Z(\Sigma)}$$

Пусть, кроме того, семейство $\{K_\sigma^+\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$ удовлетворяет условию

$(*)$ $\qquad B_R \cap K_\sigma^+ \ne \varnothing\ ,\ \forall \sigma \in \Sigma$ *для некоторого шара B_R из F_a^+*

Тогда $K_\xi \ne \varnothing\ \ \forall \xi \in Z(\Sigma)$.

Замечание 1. *Согласно теореме 5.2 и оценке (0.6) в случае полугруппы T_s, порожденной уравнением (6.1), условие $(*)$ заведомо выполнено.*

Замечание 2. *Будем обозначать через Ξ, F_a, Θ без индекса '+' пространства функций, определенных на всей оси $t \in \mathbb{R}$, соответствующие пространствам Ξ^+, F_a^+, Θ^+ с заменой $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$. Например, $\Xi_1 = \left[L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}, L_p(\omega))\right]^k$. Тогда, как нетрудно проверить, множества $Z(\Sigma)$ и $K_{Z(\Sigma)}$ компактны в пространствах Ξ и Θ соответственно.*

§7 Траекторный аттрактор нелинейного эллиптического уравнения.

В этом параграфе будет проверена справедливость условий теоремы 6.1 для семейства задач (6.1) и, тем самым, будет установлено существование траекторного аттрактора семейства (6.1).

Теорема 1. *Семейство $\{K_\sigma^+\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$, соответствующее семейству уравнений (6.1) (Θ^+, Σ) - замкнуто.*

Доказательство. Пусть $u_n \in K_{\sigma_n}^+$, $u_n \to u$ в Θ^+, $\sigma_n \to \sigma$ в Ξ^+. Докажем, что $u \in K_\sigma^+$. По определению пространства $K_{\sigma_n}^+$ функции $u_n(t)$ являются ограниченными решениями уравнений

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 u_n + \Delta u_n) + \gamma \partial_t u_n - f(u_n) = \sigma_n(t) \\ u_n|_{t=0} = u_n^0\ ;\ u_n \in V_0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Так как $u_n \to u$ в Θ^+, то последовательность $u_n(t)$ равномерно ограничены в пространстве $[H_{2,p}([0,1] \times \omega)]^k$, следовательно, по теореме о следах, u_n^0 равномерно ограничено в пространстве V_0. Согласно лемме 6.1, последовательность σ_n равномерно ограничена по норме $|\cdot|_a$. Поэтому, согласно оценке (0.6), последовательность u_n равномерно ограничена в пространстве F_a^+. Итак, $u \in F_a^+$. Почленным предельным переходом в уравнении (7.1) получаем теперь, что $u \in K_\sigma^+$. Теорема 1 доказана. $\square$

Теорема 2. *Полугруппа $\{T_s\,, s \geq 0\}$, соответствующая семейству (6.1), обладает в K_{Σ}^{+} компактным притягивающим множеством P. В качестве P можно взять следующее множество:*

$$P = T_s(B_R \cap K_{\Sigma}^{+})\ ,\ s > 0$$

Здесь B_R – шар достаточно большого радиуса в пространстве F_a^{+}.

Доказательство. В силу оценки (0.6) и леммы 6.1 множество P является притягивающим (и даже поглощающим). Докажем его компактность. В случае выбора слабой топологии ($\Theta^{+} = \Theta_2^{+}$, $\Xi^{+} = \Xi_2^{+}$) множество P является компактным ввиду его ограниченности в F_a^{+}. Рассмотрим случай $\Theta^{+} = \Theta_1^{+}$, $\Xi^{+} = \Xi_1^{+}$. Без ограничения общности можно считать, что $s > 1$. Пусть задана последовательность $u_n \in B_R \cap K_{\Sigma}^{+}$. Для доказательства теоремы достаточно выделить из u_n подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $[H_{2,p}(\Omega_T)]^k$ при произвольном $T \geq s$. Умножим уравнение (7.1) на срезающую функцию $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, такую что $\phi \equiv 1$ при $t \in [T, T+1]$ и $\phi \equiv 0$ при $t \notin [T-1, T+2]$. Получим

$$(7.2)\qquad \begin{cases} \partial_t^2(\phi u_n) + \Delta(\phi u_n) = a^{-1}(\phi\sigma_n + \phi f(u_n) - \gamma\phi\partial_t u_n) + \\ \qquad\qquad\qquad + 2\partial_t\phi\partial_t u_n + (\partial_t^2\phi)u_n = h_n(t) \\ \phi u_n|_{\partial\Omega_{T-1,T+2}} = 0 \end{cases}$$

Так как последовательность u_n равномерно ограничена в $[H_{2,p}(\Omega_{T-1,T+2})]^k$, то из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы также обозначим через u_n. Согласно теореме вложения Соболева, $u_n \to u$ в пространстве $\left[\mathrm{C}^1(\Omega_{T-1,T+2})\right]^k$. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma_n \to \sigma$ в пространстве $[L_p(\Omega_{T-1,T+2})]^k$. Следовательно, $h_n \to h$ в пространстве $[L_p(\Omega_{T-1,T+2})]^k$. По теореме о L_p-регулярности решений уравнения Лапласа получаем теперь

$$\phi u_n \to \phi u \text{ в } [H_{2,p}(\Omega_{T-1,T+2})]^k \text{ следовательно, } u_n \to u \text{ в } [H_{2,p}(\Omega_T)]^k$$

Так же как и в теореме 1 доказывается, что $u \in P$. Теорема 2 доказана. □

Итак, все условия теоремы 6.1 проверены, следовательно справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть Σ – компактное подмножество в Ξ^{+}, инвариантное относительно действия полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$. Тогда семейство уравнений (6.1) обладает траекторным аттрактором $\mathbb{A}_{\Sigma}$. Кроме того,*

$$\mathbb{A}_{\Sigma} = \mathbb{A}_{\omega(\Sigma)} = \Pi_{+} K_{Z(\Sigma)}$$

Более того, для любого полного символа $\xi(\cdot) \in Z(\Sigma)$ ядро K_{ξ} непусто, то есть существует хотя бы одно ограниченное при $t \in \mathbb{R}$ решение уравнения (6.1) с правой частью $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Опишем теперь характер притяжения к аттрактору $\mathbb{A}_{\Sigma}$ траекторий семейства (6.1).

Следствие 1. *Пусть B ограниченное подмножество в $K_{\Sigma}^{+} \cap F_a^{+}$, $t_2 > t_1 \geq 0$*

и $\Theta^+ = \Theta_1^+$, $\Xi^+ = \Xi_1^+$. *Тогда*

$$\mathrm{dist}_{2,p}(\Pi_{t_1,t_2} T_s B\,,\, \Pi_{t_1,t_2} \mathbb{A}_\Sigma) \to 0 \text{ при } s \to +\infty \text{ , где}$$
$$\mathrm{dist}_{2,p}(M,N) = \sup_{x \in M} \inf_{y \in N} ||x-y, \Omega_{t_1,t_2}||_{2,p}$$

Здесь через Π_{t_1,t_2} *обозначен оператор сужения функции на интервал* $[t_2, t_1]$.

Следствие 2. *Пусть* $u(t)$, $t \geq 0$ *– произвольное решение задачи* (6.1) *с фиксированным символом* $\sigma(\cdot) \in \Sigma$. *Тогда для любого* $N > 0$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $T_0 = T_0(N, \varepsilon) > 0$, *что для любого* $T > T_0$ *существует полный символ* $\xi_T(\cdot) \in Z(\Sigma)$ *и ограниченное на всей оси решение* $u_T(\cdot) \in K_\xi$, *для которого выполнено неравенство*

(7.4) $$||u - u_T, \Omega_{T,T+N}||_{2,p} \leq \varepsilon$$

При этом предполагается, что в пространствах Θ^+ *и* Ξ^+ *выбрана сильная топология (то есть* $(\Theta^+, \Sigma^+) = (\Theta_1^+, \Sigma_1^+)$*).*

Кроме того, как в случае выбора сильной топологии, так и в случае выбора слабой топологии (то есть $(\Theta^+, \Sigma^+) = (\Theta_2^+, \Sigma_2^+)$*), выполнено неравенство*

(7.5) $$||u - u_T, \Omega_{T,T+N}||_{1,\infty} \leq \varepsilon$$

Доказательство этого утверждения немедленно следует из определения аттрактора $\mathbb{A}_\Sigma \subset K_\Sigma^+$ и компактности вложения $H_{2,p}^w \subset\subset C^1$.

§8 Следствия из основной теоремы о существовании траекторного аттрактора.

В этом параграфе приведен ряд следствий из теоремы 7.3 и рассмотрены некоторые приложения. Кроме этого, исследован вопрос о существовании ограниченных на всей оси $t \in \mathbb{R}$ решений уравнения (6.0).

Прежде всего, конкретизируем выбор пространства символов Σ семейства уравнений (6.1).

Лемма 1. *Пусть* Σ *компактное подмножество в* Ξ^+, *инвариантное относительно полугруппы* $\{T_s\,, s \geq 0\}$ *и пусть* $g \in \Sigma$. *Тогда оболочка функции* g

(8.1) $$\mathcal{H}^+(g) = [T_s g, s \geq 0]_{\Xi^+} \subset\subset \Xi^+$$

компактна в пространстве Ξ^+.

Доказательство леммы сразу следует из вложения $\mathcal{H}^+(g) \subset \Sigma$.

Определение 1. *Функцию* $g \in \Xi^+$ *назовем трансляционно компактной в* Ξ^+, *если выполнено условие* (8.1).

Очевидно, что множество $\mathcal{H}^+(g)$ трансляционно инвариантно, то есть

(8.2) $$T_s \mathcal{H}^+(g) \subset \mathcal{H}^+(g)\ ,\ \ s \geq 0$$

Следовательно, множество $\mathcal{H}^+(g)$ может быть выбрано в качестве пространства символов Σ семейства (6.1), если g трансляционно компактна в Ξ^+.

Определение 2. *Назовем траекторным аттрактором* $\mathbb{A}_g$ *уравнения* (6.0) *с правой частью* $g(t)$ *(трансляционно компактной в* Ξ^+*) траекторный аттрактор* $\mathbb{A}_\Sigma$ *семейства* (6.1) *с пространством символов* $\Sigma = \mathcal{H}^+(g)$. *Будем называть* $\mathcal{A}_g$ *сильным траекторным аттрактором, если в пространствах* Ξ^+ *и* Θ^+

выбрана сильная топология ($\Theta^+ = \Theta_1^+$, $\Xi^+ = \Xi_1^+$), и слабым траекторным аттрактором в противном случае ($\Theta^+ = \Theta_2^+$, $\Xi^+ = \Xi_2^+$). Слабый траекторный аттрактор мы иногда будем обозначать символом $\mathbb{A}_g^w$.

Сформулируем без доказательства критерии трансляционной компактности в пространствах Ξ_i^+, $i = 1\,,\, 2$.

Теорема 1 [7], [5].

1. Функция $g(t), t \in \mathbb{R}_+$ является трансляционно компактной в пространстве Ξ_2^+ тогда и только тогда, когда выполнено условие (0.3).

2. Функция $g(t), t \in \mathbb{R}_+$ является трансляционно компактной в пространстве Ξ_1^+ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

a) Для любого фиксированного $t > 0$ множество $\{\int_s^{t+s} g(z)\,dz\,,\; s \in \mathbb{R}_+\}$ предкомпактно в пространстве $[L_p(\omega)]^k$.

b) Существует функция $\beta(s)$, $s \ge 0$, $\beta(s) \to 0$ при $s \to +0$, такая что

$$\int_t^{t+1} ||g(z) - g(z+l)||_{L_p(\omega)}\,dz \le \beta(|l|)\;,\; \forall t \in \mathbb{R}_+\;;\; t + l \in \mathbb{R}_+ \tag{8.3}$$

Замечание. Условие (8.3) заведомо выполнено, если

$$||T_s g, [0,1] \times \omega||_{\delta,p} \le C\;,\; \forall s \in \mathbb{R}_+$$

для некоторого $\delta > 0$.

Теорема 2.

1. *Пусть g удовлетворяет условию* (0.3). *Тогда уравнение* (6.0) *обладает слабым траекторным аттрактором $\mathbb{A}_g^w$.*
2. *Пусть g трансляционно компактна в пространстве Ξ_1^+. Тогда уравнение* (6.0) *обладает сильным траекторным аттрактором $\mathbb{A}_g$.*

Доказательство этой теоремы следует непосредственно из теоремы 7.3 и предыдущей теоремы.

Заметим, что если g трансляционно-компактна в пространстве Ξ_1^+, то, согласно теореме 2, мы можем построить не только сильный $\mathbb{A}_g$, но и слабый $\mathbb{A}_g^w$ траекторный аттрактор уравнения (6.0). Следующая лемма показывает, что при этом мы не получим ничего нового.

Лемма 2. *Пусть g трансляционно-компактна в пространстве Ξ_1^+. Тогда*

$$\mathbb{A}_g^w = \mathbb{A}_g \tag{8.4}$$

Так как пространства Θ_1^+ и Θ_2^+ совпадают как множества, то последнее равенство имеет смысл.

Доказательство. Будем использовать индекс '1' для обозначения сильной топологии (Ξ_1^+), а индекс '2' – для обозначения слабой топологии (Ξ_2^+). (Например, символ $\mathcal{H}_2^+(g)$ – будет обозначать оболочку функции g в пространстве Ξ_2^+).

Согласно теореме 7.3, $\mathbb{A}_g^w = \Pi_+ K_{Z_2(g)}$ и $\mathbb{A}_g = \Pi_+ K_{Z_1(g)}$, поэтому для доказательства леммы достаточно доказать, что

$$Z_1(g) = Z_2(g) \tag{8.5}$$

Здесь и далее $Z(g) = Z(\mathcal{H}^+(g))$ и $\omega(g) = \omega(\mathcal{H}^+(g))$.

Из определения множества $Z(g)$ (см. определение 6.7) следует, что формула (8.5) будет доказана, если мы докажем, что

$$\omega_1(g) = \omega_2(g) = \omega(g) \tag{8.6}$$

Пусть $h \in \omega_2(g)$, тогда из определения 6.6 и формулы (6.6′) следует, что $h = \text{w-}\lim_{n\to\infty} T_{s_n} g$, для некоторой последовательности $s_n \to +\infty$ (см.[4]). Так как оболочка $\mathcal{H}_1^+(g)$ компактна в $\varXi_1^+$ и $T_{s_n} g \in \mathcal{H}_1^+(g)$, то, без ограничения общности, можно считать, что $h = \text{s-}\lim_{n\to\infty} T_{s_n} g \in \mathcal{H}_1^+(g)$. Следовательно, $\omega_1(g) \subset \omega_2(g)$. Обратное вложение очевидно, поэтому $\omega_1(g) = \omega_2(g) = \omega(g)$. □

Рассмотрим теперь несколько примеров уравнений (6.0) с трансляционно компактными правыми частями, естественно возникающих в приложениях.

Пример 1. Пусть $g(t,x) = \varphi(t) g_0(x)$, где $\varphi(t)$ – асимптотически почти периодическая числовая функция на полуоси $t \in \mathbb{R}_+$ (см. [14]), а $g_0 \in [L_p(\omega)]^k$. Тогда функция g трансляционно компактна в $\varXi_1^+$.

Пример 2. Пусть $g(t,x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) g_{0\,i}(x)$, где $g_{0\,i}(x) \in [L_p(\omega)]^k$, а функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_m(t))$ является ограниченным при $t \in \mathbb{R}_+$ решением автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi)\ , \varphi(t) \in \mathbb{R}^m\ ,\ t \in \mathbb{R}_+ \tag{8.7}$$

Предполагается , что уравнение (8.7) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решений. Тогда, как нетрудно проверить, функция g является трансляционно компактной в $\varXi_1^+$.

Пример 3. Обобщим конструкцию примера 2. Рассмотрим каскадную систему

$$a_1(\partial_t^2 g + \Delta g) + \gamma_1 \partial_t g - f_1(g) = g_0\ ;\ g_0 \in [L_p(\omega)]^k \tag{8.8}$$

$$a_2(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma_2 \partial_t u - f_2(u) = g(t) \tag{8.9}$$

Предположим, что для уравнений (8.8), (8.9) выполнены условия, сформулированные во введении к главе 1. Тогда, согласно оценке (0.6), примененной к уравнению (8.8), для любого решения $g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, его оболочка ограничена в F_a^+, а значит g трансляционно компактна в пространстве $\varXi_1^+$. Множество ограниченных при $t \in \mathbb{R}_+$ решений уравнения (8.8) обозначим через K_1^+. Нетрудно проверить, что автономная система (8.8), (8.9) также является системой вида (6.0) и допускает оценку (0.6). Поэтому, согласно теореме 2, обладает траекторным аттрактором, который мы обозначим символом $\mathbb{A}$. Обозначим через $\mathbb{A}^{(1)}$ и $\mathbb{A}^{(2)}$ его проекции на первую (g) и вторую (u) компоненту. Тогда $\mathbb{A}^{(1)}$ – траекторный аттрактор уравнения (8.8). Исследуем структуру множества $\mathbb{A}^{(2)}$. Для этого введем еще два определения. Фиксируем произвольное $g \in K_1^+$ и обозначим через $\mathbb{A}_g^{(2)}$ траекторный аттрактор уравнения (8.9):

$$\mathbb{A}_g^{(2)} = \mathbb{A}_{\mathcal{H}^+(g)}$$

Кроме этого, аттрактор $\mathbb{A}^{(1)}$ первого уравнения может быть рассмотрен как пространство символов для второго уравнения ($\varSigma = \mathbb{A}^{(1)}$). Построенный таким образом траекторный аттрактор обозначим символом $\mathbb{A}_{(1)}^{(2)}$.

Теорема 3.
$$\mathbb{A}^{(2)}_{(1)}=\mathbb{A}^{(2)}=\cup_{g\in\mathbb{A}^{(1)}}\mathbb{A}^{(2)}_g=\cup_{g\in K_1^+}\mathbb{A}^{(2)}_g$$

Доказательство. Пусть $\Sigma=\mathbb{A}^{(1)}$. Докажем, что

$$\Sigma=\mathcal{H}^+(\Sigma)=\Pi_+Z(\Sigma) \tag{8.9$'$}$$

Так как аттрактор $A^{(1)}$ строго инвариантен относительно действия полугруппы $\{T_s, s\ge 0\}$, то для доказательства формулы (8.9′) достаточно доказать, что множество $A^{(1)}$ замкнуто в пространстве Ξ^+. Но последнее утверждение является очевидным следствием компактности $A^{(1)}$ в пространстве $\Theta^+\subset\Xi^+$. Таким образом, формула (8.9′) доказана. Утверждение теоремы теперь легко следует из представления траекторного аттрактора с помощью объединения всех ограниченных при $t\in\mathbb{R}$ траекторий (см.[14]).

Замечание. *В качестве источника трансляционно компактной функции $g(t)$ в примере 3, вместо уравнения (8.8) можно взять любое другое уравнение (например, уравнение реакции диффузии), обладающее траекторным аттрактором в пространстве Θ_1^+.*

Применим теперь теорему 7.3 для доказательства существования решений следующей задачи в полном цилиндре $\Omega=\mathbb{R}\times\omega$.

$$\begin{cases} a(\partial_t^2u+\Delta u)+\gamma\partial_t u-f(u)=\xi(t)\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ ||u||_{F_a}<\infty\end{cases} \tag{8.10 }$$

Теорема 4. *Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию*

$$|\xi|_a=\sup_{t\in\mathbb{R}}||\xi,\Omega_t||_{0,p}<\infty \tag{8.11 }$$

тогда задача (8.10) *обладает хотя бы одним решением в пространстве F_a .*

Доказательство. Аналогично формуле (8.1), определим оболочку функции ξ в пространстве Ξ_2

$$\mathcal{H}(\xi)=[T_s\xi, s\in\mathbb{R}]_{\Xi_2} \tag{8.12 }$$

Так же, как и для функций на полуоси, множество $\mathcal{H}(\xi)$ компактно в пространстве Ξ_2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (8.11) (см.[7]). Выберем в качестве пространства символов семейства уравнений (6.1) множество

$$\Sigma=\Pi_+\mathcal{H}(\xi)$$

Тогда, очевидно

$$T_s\Sigma=\Sigma\ ,\ \forall s\ge 0\ ;\ \omega(\Sigma)=\Sigma\ ;\ Z(\Sigma)=\mathcal{H}(\xi)$$

Следовательно $\xi(\cdot)\in Z(\Sigma)$, а значит по теореме 7.3 $K_\xi\ne\varnothing$. □

Замечание. Пусть ξ трансляционно компактна в пространстве Ξ_1 . Тогда любое решение $u(t)$ задачи (8.10) трансляционно-компактно в пространстве Θ_1, то есть

$$\mathcal{H}(u)=[T_su\ ,\ s\in\mathbb{R}]_{\Theta_1}\subset\subset\Theta_1 \tag{8.13}$$

Формула (8.13) следует из компактности множества $K_{Z(\Pi_+\mathcal{H}(g))}$ и очевидного вложения $\mathcal{H}(u)\subset K_{Z(\Pi_+\mathcal{H}(g))}$.

§9 Стабилизация решений при $t \to \infty$.

В этом параграфе мы рассмотрим следующее возмущение уравнения (6.0):

$$a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u) = g(t) + g_1(t) \tag{9.1}$$

Предположим, что возмущающая функция $g_1(t)$ удовлетворяет условию:

$$T_s g_1(t) \to 0 \text{ в пространстве } \Xi^+ \text{ при } s \to +\infty \tag{9.2}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (9.2), *тогда траекторный аттрактор возмущенной системы совпадает с траекторным аттрактором невозмущенной системы:*

$$\mathbb{A}_{g+g_1} = \mathbb{A}_g \tag{9.3}$$

Доказательство. Так как $T_s g_1 \to 0$ при $s \to +\infty$, то из формулы (6.6′) следует:

$$\omega(\mathcal{H}^+(g + g_1)) = \omega(\mathcal{H}^+(g))$$

Таким образом,

$$\mathbb{A}_{g+g_1} = \mathbb{A}_{\mathcal{H}^+(g+g_1)} = \mathbb{A}_{\omega(\mathcal{H}^+(g+g_1))} = \mathbb{A}_{\omega(\mathcal{H}^+(g))} = \mathbb{A}_{\mathcal{H}^+(g)} = \mathbb{A}_g$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Пример 1. Пусть $g_0, g_{01} \in L_p(\omega)$, $g = g_0(x)$, $g_1 = g_{01}(x) \sin t^2$. Тогда слабый траекторный аттрактор $\mathbb{A}^w_{g+g_1}$ уравнения

$$a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u) = g_0(x) + g_{01}(x) \sin t^2$$

совпадает с траекторным аттрактором $\mathbb{A}_g$ автономного уравнения

$$a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u) = g_0(x) \text{ , то есть } \mathbb{A}^w_{g+g_1} = \mathbb{A}^w_g = \mathbb{A}_g$$

Действительно, $T_s \sin t^2 \rightharpoonup 0$ в пространстве $C[0, 1]$ при $s \to \infty$, следовательно, $T_s g_1 \to 0$ в пространстве Ξ^+_2.

Предположим теперь, что нелинейная функция f обладает потенциалом, то есть

$$f(u) = -\nabla F(u) \ , \ F \in C(\mathbb{R}^k) \tag{9.4}$$

Тогда, при некоторых дополнительных предположениях относительно правой части g уравнения (6.0), мы можем более полно описать поведение решений (6.0) при $t \to +\infty$.

Определение 1. Будем говорить, что функция g удовлетворяет условию стабилизации при $t \to +\infty$, если выполнены следующие условия:

1) $g(t, x) = g_+(x) + g_1(t, x)$, где $|g_1|_a < \infty$, $g_+ \in L_p(\omega)$

2) Предельная задача

$$\Delta w_+ - f(w_+) = g_+ \ , \ w_+ = w_+(x) \ , \ x \in \omega \tag{9.5}$$

имеет лишь конечное число решений $W_+ = \{w_+^1, \cdots, w_+^{m_+}\}$.

3) $T_s g_1 \to 0$ при $s \to +\infty$ в пространстве Ξ^+_2 и выполнено хотя бы одно из

следующих условий:

$$(9.6) \qquad \begin{cases} 1) \quad \displaystyle\int_0^\infty ||g_1(t)||_{0,p}\, dt < \infty \\ 2) \quad \displaystyle\int_0^\infty ||\partial_t g_1(t)||_{0,p}\, dt < \infty \\ 3) \quad \displaystyle\int_0^\infty ||G_1(t)||_{0,p}\, dt < \infty \text{ , где } \partial_t G_1 = g_1 \end{cases}$$

Замечание 1. *Как известно (см. например [4]), множество функций g_+, для которых (9.5) имеет конечное число решений, является открытым всюду плотным подмножеством пространства $L_p(\omega)$.*

Теорема 2. *1. Пусть выполнено условие (9.4), $\gamma > 0$ (точнее $\gamma + \gamma^* > 0$) или $\gamma < 0$ и функция g удовлетворяет условию стабилизации при $t \to +\infty$. Тогда, любое решение $u(t)$ задачи (6.0) стабилизируется при $t \to +\infty$:*

(9.7) $\qquad T_s u|_{\Omega_{0,1}} \rightharpoonup w_+$ *при* $s \to +\infty$ *слабо в* $H_{2,p}(\Omega_{0,1})$, $w_+ \in W_+$

В дальнейшем утверждение (9.7) будет записываться в виде:

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = w_+$$

2. Если, кроме того, g трансляционно-компактна в Ξ_1^+, то слабая сходимость в формуле (9.7) заменяется на сильную.

Замечание. В автономном случае ($g_1 = 0$) аналогичный результат анонсирован в работе [3]. В случае скалярного автономного уравнения (6.0) с одной пространственной переменной ($x \in \omega \subset\subset \mathbb{R}^1$) условие конечности решений предельной задачи (9.5) может быть снято (см. [15]).

Доказательство теоремы. Умножив уравнение (6.0) скалярно на $\partial_t u$, получим

(9.8)

$$\frac{1}{2}\partial_t(a\partial_t u, \partial_t u) + (\gamma\partial_t u, \partial_t u) - \frac{1}{2}\partial_t(a\nabla u, \nabla u) + \partial_t(F(u), 1) - \partial_t(g_+, u) = (g_1, \partial_t u)$$

Оценим правую часть последнего равенства, используя условия (9.6). Пусть выполнено условие 1). Тогда

$$\int_0^T (g_1, \partial_t u)\, dt \le \sup_{t \in [0,T]} ||\partial_t u||_{0,p'} \int_0^T ||g_1(t)||_{0,p}\, dt \le C_1 ||u||_a \int_0^{+\infty} ||g_1(t)||_{0,p}\, dt$$

Следовательно, благодаря оценке (0.6),

$$(9.9) \qquad \int_0^T (g_1, \partial_t u)\, dt \le C \text{ , где } C \text{ не зависит от } T$$

Пусть выполнено условие 2). Тогда

$$(9.9') \qquad \int_0^T (g_1, \partial_t u)\, dt = (g_1, u)|_0^T - \int_0^T (\partial_t g_1, u)\, dt$$

Докажем, что выражение $(g_1, u)|_0^T$ ограничено при $T \to +\infty$. Для этого достаточно доказать ограниченность функции $\phi(t) = (g_1(t)\,, u(t))$. Имеем,

$$\partial_t \phi(t) = (\partial_t g_1\,, u) + (g_1\,, \partial_t u) \le C(||\partial_t g_1||_{0,p}||u||_a + ||g_1||_{0,p}^p + ||u||_a^{p'})$$

Итак,

$$\int_T^{T+1} |\partial_t \phi(t)|\,dt \le C(|g_1|_a^p + ||u||_a \int_0^\infty ||\partial_t g_1||_{0,p}\,dt + ||u||_a^{p'}) \le C_1$$

$$\int_T^{T+1} |\phi(t)|\,dt \le C(|g_1|_a^p + ||u||_a^{p'}) \le C_2$$

Следовательно, $|\phi(t)| \le C_1 + C_2$, $\forall t \ge 0$. Таким образом,

$$(g_1, u)|_0^T \le 2(C_1 + C_2)$$

Оценивая интеграл в правой части формулы $(9.9')$ так же, как и в случае 1), получим оценку (9.9).

Пусть, наконец, выполнено условие 3). Тогда

$$\int_0^T (g_1, \partial_t u)\,dt = (G_1, \partial_t u)|_0^T - \int_0^T (G_1, \partial_t^2 u)\,dt \tag{9.10}$$

Оценим последний интеграл в формуле (9.10) (Внеинтегральный член оценивается аналогично случаю 2)).

$$\int_0^T (G_1, \partial_t^2 u) \le \sum_{n=0}^{[T]+1} ||\partial_t^2 u, \mathit{\Omega}_n||_{0,p'} \int_n^{n+1} ||G_1(t)||_{0,p}\,dt \le$$

$$\le C||u||_a \int_0^\infty ||G_1(t)||_{0,p}\,dt < \infty$$

Итак, во всех трех случаях справедлива оценка (9.9). Проинтегрировав теперь соотношение (9.8) по отрезку $[0, T]$, и, использовав оценки (9.9), (0.6) и положительность матрицы γ, получим

$$\int_0^T ||\partial_t u||^2\,dt \le C \text{ , где } C \text{ не зависит от } T,$$

то есть

$$\int_0^{+\infty} ||\partial_t u||^2\,dt < \infty \tag{9.11}$$

Докажем сначала, что $u(t) \to w_+$ в $L_2(\omega)$ для некоторого $w_+ \in W_+$. Предположим противное. Тогда, так как функция $u : \mathbb{R}_+ \to L_2(\omega)$ непрерывна, а множество W_+ конечно, то существует последовательность $s_k \to \infty$, такая что

$$||u(s_k) - w_+, L_2(\omega)|| \ge \epsilon \text{ для любого } w_+ \in W_+\text{ , } \epsilon > 0\text{ , } k \in \mathbb{N} \tag{9.11$'$}$$

Рассмотрим последовательность $\{T_{s_k} u,\, k \in \mathbb{N}\} \in \mathit{\Theta}_2^+$. Согласно теореме 7.2, из последовательности $\{s_k\}$ можно выделить подпоследовательность (которую мы также обозначим через $\{s_k\}$), такую что $T_{s_k} u \to u_0$ в пространстве $\mathit{\Theta}_2^+$. Используя неравенство (9.11), нетрудно показать, что $\int_T^{T+1} ||\partial_t u_0(t)||\,dt = 0$ для любого $T > 0$. Таким образом, $u_0(t, x) = u_0(x)$. Из теоремы 7.1 следует теперь, что $u_0 \in W_+$, что противоречит $(9.11')$. (Напомним, что $\mathit{\Theta}_2^+ \subset\ C^{\rm loc}(\mathit{\Omega}_+))$.

Итак,

$$(9.11'') \qquad u(t) \to w_+ \text{ при } t \to +\infty \text{ в } L_2(\omega)\ ,\ w_+ \in W_+$$

Завершим доказательство теоремы 2. Предположим, что утверждение (9.7) неверно. Тогда, так как по теореме 7.2 множество $P_u = \{T_s u,\ s \geq 1\}$ предкомпактно в Θ_2^+, то существует последовательность $s_k \to +\infty$, такая что $\lim_{s_k \to \infty} T_{s_k} u = u_+(t,x) = u_+(x) \neq w_+$, что противоречит (9.11″). $\square$

Замечание. Как показывают элементарные примеры, при нарушении условия $\gamma > 0$ (или $\gamma < 0$) стабилизации решений, вообще говоря, нет.

Приведем примеры функций g_1, удовлетворяющих условиям (9.6)

1) Пусть $g_1(t,x) = g_0(x)\frac{|\sin(t^2)|}{1+t^2}$. Тогда выполнено условие 1.

2) Пусть $g_1(t,x) = g_0(x)\frac{t}{t^2+1}$. Тогда выполнено условие 2.

3) Пусть $g_1(t,x) = g_0(x)\sin(t^3)$. Тогда выполнено условие 3.

В заключение применим теорему 2 для исследования уравнения (8.10) с правой частью $\xi(t)$ заданной на всей прямой $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (9.4), $\gamma > 0$ *и функция* $\xi(t)$ *удовлетворяет условиям стабилизации как при* $t \to +\infty$, *так и при* $t \to -\infty$ *(то есть* $\xi(-t)$ *удовлетворяет условию стабилизации при* $t \to +\infty$*). Тогда для любого решения* $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *уравнения* (8.10) *(*$u \in F_a$*) выполнены следующие условия:*

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = w_- \quad ; \quad \lim_{t \to +\infty} u(t) = w_+$$

Здесь $w_+ \in W_+$ *и* $w_- \in W_-$ *– решения соответствующих предельных задач, а все пределы понимаются в смысле, описанном в формуле* (9.7).

§10 Траекторный аттрактор эллиптического уравнения с неавтономной нелинейностью.

В этом параграфе мы кратко изложим схему построения траекторного аттрактора для общего случая уравнения (0.1), которое отличается от уже рассмотренного выше тем, что нелинейная функция f может зависеть от t. Благодаря наличию оценки (0.6) в общем случае, все результаты, полученные в §§6–9 почти дословно переносятся на случай уравнения (0.1). Единственное отличие состоит в необходимости изменить определение символа, данное в §6. Действительно, так как нелинейная функция f явно зависит от t, то, как известно (см. [7]), для корректного определения траекторного аттрактора необходимо в качестве символа σ уравнения (0.1) рассматривать пару $\sigma(\,\cdot\,) = (f(\,\cdot\,), g(\,\cdot\,))$ (в противном случае семейство $\{K_\sigma^+, \sigma \in \Sigma\}$ не будет трансляционно согласованным). Остановимся на этом более подробно.

Определение 1. *Пусть* $G = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+$. *Обозначим*

$$\mathbb{M}^+ = C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, C^{\text{loc}}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)) = C^{\text{loc}}(G, \mathbb{R}^k)$$

Топология в $\mathbb{M}^+$ *задается следующим образом: последовательность* $h_n(v,t)$ *сходится к* $h(v,t)$, $v \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}_+$, *если для любого компакта* K, $K \subset\subset G$ $h_n|_K \rightrightarrows h|_K$ *в пространстве* $C(K\,, \mathbb{R}^k)$.

Определение 2. *Аналогично §6, обозначим символом Ξ^+ либо пространство $\Xi_1^+ = \mathbb{M}^+ \times [L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+\,, L_p(\omega))]^k$, либо – $\Xi_2^+ = \mathbb{M}^+ \times [L_p^{\mathrm{loc},w}(\mathbb{R}_+\,, L_p(\omega))]^k$. В первом случае топологию пространства Ξ^+ будем называть сильной, а во втором – слабой.*

Рассмотрим совместно следующее семейство уравнений вида (0.1):

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - \psi(u,t) = h(t) \\ \sigma \equiv (\psi(\cdot), h(\cdot)) \in \Sigma \end{cases} \tag{10.1}$$

Здесь Σ - компакт в Ξ^+, обладающий следующими свойствами:

$$T_s \Sigma \subset \Sigma \ , \quad T_s \sigma(t) = \sigma(t+s)$$

$$\psi(u,t)\,.\,u \geq -C + C|u|^{2+\varepsilon} \ ; \ \varepsilon, C > 0 \tag{10.2}$$

равномерно по всем $\psi \in \Sigma_1$, где $\Sigma_1 = \Pi_1 \Sigma$, Π_1 – оператор проектирования на первую компоненту пары $(\psi\,, h)$ $(\Pi_1(\psi\,, h) = \psi)$. В этом случае, как нетрудно показать (см. [7]), пункт 3) условий (0.4) выполняется равномерно по всем $\psi \ \in \ \Sigma_1$.

Определение 3. *Функцию $f \in \mathbb{M}^+$ назовем трансляционно компактной в $\mathbb{M}^+$, если ее оболочка $\mathcal{H}^+(f) = [T_s f,\, s \geq 0]_{\mathbb{M}^+}$, где $T_s f(\cdot\,, t) = f(\cdot\,, t+s)$, компактна в пространстве $\mathbb{M}^+$.*

Замечание. В приложениях в качестве пространства символов семейства (10.1) обычно берется множество $\Sigma = \mathcal{H}^+(f) \times \mathcal{H}^+(g)$ (или $\Sigma = \mathcal{H}^+(f\,, g)$), где f и g – некоторые фиксированные функции, трансляционно компактные в соответствующих пространствах, причем функция f удовлетворяет условиям (0.4). Тогда, как нетрудно проверить, любая функция $\psi \in \Sigma_1$ удовлетворяет условиям (0.4) с теми же константами, что и исходная функция f. Таким образом, в этом случае условие (10.2) заведомо выполнено.

С учетом указанных выше изменений все определения и теоремы §§6–8 переносятся на случай уравнения (0.1). Например, аналог теоремы 8.2 будет звучать так:

Теорема 1. *Пусть f трансляционно компактна в пространстве $\mathbb{M}^+$ и удовлетворяет условиям (0.4). Тогда*

1. Если g удовлетворяет условию (0.3), то уравнение (0.1) обладает слабым траекторным аттрактором $\mathbb{A}^w_{\{f,g\}} = \mathbb{A}^w_\Sigma$ $(\Sigma = \mathcal{H}^+(f) \times \mathcal{H}^+_{\Xi_2^+}(g))$.

2. Если g трансляционно компактна в Ξ_1^+, то уравнение (0.1) обладает сильным траекторным аттрактором $\mathbb{A}_{\{f,g\}} = \mathbb{A}_\Sigma$ $(\Sigma = \mathcal{H}^+(f) \times \mathcal{H}^+_{\Xi_1^+}(g))$.

Аналогом теорем 9.1 и 9.2 являются следующие теоремы:

Теорема 2. *Пусть $T_s\{f_1, g_1\} \to 0$ в Ξ^+ . Тогда*

$$\mathbb{A}_{\{f+f_1\,, g+g_1\}} = \mathbb{A}_{\{f,g\}}$$

Предположим теперь, что нелинейная функция f имеет вид:

$$f(u,t) = f_0(u) + f_1(u,t) \ , \text{ где } f_0 = -\nabla F_0(u)$$

Пусть также $T_s f_1 \to 0$ в $\mathbb{M}^+$ при $s \to +\infty$, и выполнено следующее условие:

$$\max_{|u|\le r} |f_1(u,t)| \le Q(r,t)\ , \ \int_0^{+\infty} Q(r,t)\,dt \le Q_1(r) < \infty \tag{10.3}$$

Теорема 3. *Пусть f удовлетворяет условиям, сформулированным выше, а функция g – условиям стабилизации, сформулированным в §9. Тогда любое решение задачи (0.1) стабилизируется при $t \to +\infty$:*

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = w_+$$

Здесь $w_+ \in W_+$ – некоторое решение предельной задачи (9.5) с $f = f_0$.

Наконец, рассмотрим аналог задачи (8.10) в полном цилиндре $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$.

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma\partial_t u - f(u,t) = \xi(t) \\ \qquad\qquad ||u||_{F_a} < \infty \end{cases} \tag{10.4}$$

Теорема 4. *Пусть функция $f(\cdot,t), t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (0.4) на всей оси $t \in \mathbb{R}$, а функция $\xi(t)$ – условию (8.11). Тогда задача (10.4) имеет в F_a хотя бы одно решение.*

Доказательство. Если f трансляционно компактна в пространстве $\mathbb{M}$, то решение (10.4) строится так же как и в теореме 8.4. В случае отсутствия трансляционной компактности, решение (10.4) строится аналогично доказательству теоремы 5.2. А именно: рассматривается вспомогательная задача вида (10.4) в ограниченном цилиндре $\Omega_{-M,M}$ с нулевыми краевыми условиями. На основе оценки, аналогичной (4.10), доказывается, что $||u_M||_{F_a} \le C$ равномерно по $M \in \mathbb{N}$. Выполняя затем предельный переход $M \to +\infty$, получаем решение задачи (10.4). □

Замечание. Незначительное обобщение схемы, изложенной выше, позволяет построить траекторный аттрактор и для более общего уравнения (5.6).

Литература.

1. Соболев С.Л. *Некоторые приложения функционального анализа в математической физике.*– М.: Наука, 1988.
2. Calsina A., Mora X., Sola-Morales J. *The dynamical approach to elliptic problems in cylindrical domains and a study of their parabolic singular limit* // J. Differential Equations **102** (1993), 244–304.
3. Бабин А.В. *Аттрактор обобщенной полугруппы, порожденной эллиптическим уравнением в цилиндрической области* // Изв. РАН **58, B2** (1994), 3–18.
4. Бабин А.В., Вишик М.И. *Аттракторы эволюционных уравнений.*– М.: Наука, 1989.
5. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Non-autonomous evolutionary equations with translation-compact symbols and their attractors* // C. R. Acad. Sci. Paris **321, Series 1** (1995), 153–158.
6. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Trajectory attractors for evolution equations* // C. R. Acad. Sci. Paris **t. 231, Serie 1** (1995), 1309–1314.
7. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Evolution equations and their trajectory attractors* // J. Math. Pures Appl. (1996).
8. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.*– М.: Наука, 1991.
9. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.*– М.: Мир, 1980.
10. Вольперт А. И., Худяев С.И. *Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики.*– М.: Наука, 1975.
11. Хатсон В., Пим Дж. *Приложения функционального анализа и теории операторов.*– М.: Мир, 1983.
12. Hale J.K. *Asymptotic behaviour of dissipative systems* // Math. Surveys and Mon., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987).
13. Temam R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.*– Springer-Verlag, 1988.
14. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension* // J. Math. Pures Appl. **73** (1994), no. 3, 279–333.
15. Brunovsky P., Mora X., Polacik P., Sola-Morales J. *Asymptotic behavior of solutions of semilinear elliptic equations on an unbounded strip* // Acta Math. Univ. Comenianae **LX, 2** (1995), 163–183.